

GRZEGORZ BORUTA

PODSTAWY EKSPLOATACJI URZĄDZEŃ

PLANOWANIE EKSPLOATACJI

Planowanie – chronologicznie i logicznie pierwsza funkcja zarządzania (np. kierowania eksploatacją urządzeń) – określenie przyszłego działania w celu osiągnięcia założonych efektów przy minimalizowaniu niepewności ich osiągnięcia.

Plany:

- długookresowe, strategiczne – infrastruktura systemu eksploatacji, cele rozwojowe, zmiany strukturalne,
- średniookresowe, taktyczne – potencjał eksploatacyjny parku urządzeń, rodzaj i wielkość działalności operacyjnej, nakłady, liczba pracowników,
- krótkookresowe, operacyjne – wykorzystanie potencjału eksploatacyjnego do bieżących działań, użytkowanie i obsługiwanie / naprawianie każdego pojedynczego urządzenia (przydzielanie go do konkretnych zadań jako pośrednika lub przedmiotu działania).

Przy planowaniu eksploatacji urządzeń można kierować się następującymi zasadami:

- dla systemów eksploatacji urządzeń **jednorodnych** racjonalny jest podział tych urządzeń na dwa zbiory, z których jeden jest użytkowany z intensywnością maksymalną, a drugi minimalną lub wręcz w stanie nieużytkowym (urządzenia z tego drugiego zbioru stanowią zmagazynowany zapas urządzeń gotowych do użycia w sytuacji, gdy urządzenie z pierwszego zbioru przechodzi z systemu użytku do systemu obsługi / naprawy),
- dla systemów eksploatacji urządzeń **niejednorodnych**, gdy realizacja zadań systemu eksploatacji wymaga pracy różnych urządzeń z określoną różną intensywnością, racjonalne jest użytkowanie przede wszystkim urządzeń o dużym resursie i małym czasie obsługi,
- dla systemów eksploatacji urządzeń w sytuacji **ograniczonych możliwości** wykonywania obsług / napraw racjonalne jest zapewnienie równomiernego przepływu urządzeń z systemu użytku do systemu obsługi / naprawy, co pozwala na uniknięcie zjawiska przestojów w systemie obsługi / naprawy (pojawiania się kolejki urządzeń do obsługi / naprawy w pewnych okresach, a w innych braku urządzeń do obsługi / naprawy),
- dla systemów eksploatacji urządzeń w sytuacji **niewystarczających możliwości** wykonywania obsług / napraw dla koniecznego zwiększenia intensywności użytkowania parku urządzeń, racjonalne jest użytkowanie przede wszystkim tych urządzeń, dla których pracochłonność odtworzenia stanu zdadności jest minimalna.

Stosowanie się do tych zasad może być utrudnione przez losowe zakłócenia w systemie eksploatacji związane z wahaniami wydajności systemu obsługi / naprawy (zwolnienia lekarskie obsługujących / naprawiających, brak części zamiennych i materiałów eksploatacyjnych itp.).

Podstawa operacyjnego planowania użytkowania:

- analiza zadań własnych i zleconych przez szczeble nadrzędne – wielkości zużycia ресурсu i intensywności użytkowania,
- analiza planów średniookresowych,
- bilans możliwości zabezpieczenia finansowego i materiałowego,
- normy eksploatacyjne (np. ресурсы międzyobsługowe / międzynaprawcze i docelowe),
- zalecenia doraźne,
- stan techniczny urządzeń i aktualne wartość ich ресурсu (potencjału eksploatacyjnego),
- doświadczenia z poprzednich okresów planowania.

Norma – przyjęta na podstawie analizy działania systemu w określonych warunkach wielkość nakładów jaka powinna być poniesiona na jego funkcjonowanie. W systemie eksploatacji określone są normy zużycia energii zasilających urządzenia, wielkości wykonanej pracy, wielkości miar eksploatacji urządzeń zużytych w ciągu roku, wielkości miar eksploatacji międzyobsługowych i międzynaprawczych.

Limit – nieprzekraczalna wysokość nakładów ponoszonych na funkcjonowanie systemu i realizację jego celów działania w określonym czasie. W systemie eksploatacji urządzeń stosowane są np. limity ресурсu technicznego (jednostek miary eksploatacji, jednostek energii zasilających maszyny, ilości części wymiennych itp.). Limitowanie wynika z ograniczenia środków finansowych na funkcjonowanie przedsiębiorstwa, a jego celem jest utrzymanie tzw. dyscypliny eksploatacyjnej.

Dla kryterium planowania – maksymalizacji współczynnika gotowości zbioru urządzeń jednorodnych, można zrealizować następujący algorytm:

1.przeprowadzić analizę przewidywanych zadań j powodujących zużycie lp_j ресурсu z punktu widzenia całkowitego zużycia ресурсu $L = \sum_{j=1}^J lp_j$ przez zbiór $N = \{U_k\}$, $k = \overline{1, n}$, urządzeń

tego samego typu w założonym okresie planowania, tj. określić ile urządzeń będzie pracować przez jaki czas przy wykonywaniu pracy (tzn. że i urządzeń będzie pracować przez czas t_i i że wszystkie razem wykonując pracę zużyją wartość L ресурсu);

2.urządzenia ze zbioru N ponumerować wg rosnącego zapasu ресурсu do kolejnego odnowienia (obsługiwania / naprawiania) Z_k – powinna być spełniona $Z_k \leq Z_{k+1}$;

3.obliczyć średnią liczbę użytkowanych egzemplarzy urządzenia w okresie planowania:

$$\gamma_1 = \frac{\sum_i i \cdot t_i}{\sum_i t_i};$$

4.obliczyć średnią intensywność użytkowania jednego (pierwszego) urządzenia: $\alpha_{e1} = \frac{L}{\gamma_1}$;

5.na pierwszy egzemplarz dokonać przydziału ресурсu: $l_1 = \begin{cases} \alpha_{e1} & \text{dla } \alpha_{e1} \leq Z_1; \\ Z_1 & \text{dla } \alpha_{e1} > Z_1 \end{cases}$;

6. na drugi (lub wzór bezpośrednio z pkt. 7) egzemplarz urządzenia dokonać przydziału

$$\text{obliczając: } \gamma_2 = \gamma_1 \frac{n - \frac{l_1}{\alpha_{e1}}}{n} \quad \alpha_{e2} = \frac{L - l_1}{\gamma_2} \quad l_2 = \begin{cases} \alpha_{e2} & \text{dla } \alpha_{e2} \leq Z_2; \\ Z_2 & \text{dla } \alpha_{e2} > Z_2; \end{cases}$$

7. na każdy kolejny egzemplarz o numerze $k < n$ dokonać przydziału obliczając kolejno:

$$\gamma_k = \gamma_1 \frac{n - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{l_i}{\alpha_{ei}}}{n} \quad \alpha_{ek} = \frac{L - \sum_{i=1}^{k-1} l_i}{\gamma_k} \quad l_k = \begin{cases} \alpha_{ek} & \text{dla } \alpha_{ek} \leq Z_k; \\ Z_k & \text{dla } \alpha_{ek} > Z_k; \end{cases}$$

8. na ostatni egzemplarz przydzielić: $l_n = L - \sum_{i=1}^{n-1} l_i$.

Dokonując planowania w kolejnych (następnych) okresach należy uaktualnić wielkości zapasu resursów: $Z_k^{\text{nowy}} = Z_k^{\text{stary}} - l_k$.

W przypadku, gdy w danym okresie $Z_k < \alpha_{ek}$ to urządzenie po wyczerpaniu ресурсu kierowane jest do odnowy / naprawy – rezultat planowania użytkowania jest informacją dla systemu obsługiwani / naprawiania.

Algorytm ten w pierwszej kolejności obciąża pracą urządzenia o małym resursie – w miarę szybko wyczerpują ten resurs i są kierowane do systemu obsługi / naprawy, gdzie podlegają odnowie – zwiększa to gotowość całego zbioru urządzeń.

Algorytm wzięty ze starej książki i generalnie nie działa – patrz plik excelowy!

Odnowa jest celem działania podejmowanego w stosunku do urządzenia, którego zasób pracy został zużyty i które osiągnęło stan graniczny.

W stosunku do urządzeń odnowić można:

- potencjał (zdolność) eksploatacyjny – resurs eksploatacyjny,
- stan zdatności.

Odnowę potencjału eksploatacyjnego urządzenia osiąga się poprzez:

- obsługę / naprawę,
- wymianę na nowe.

Dla urządzeń ustala się z góry lub na podstawie badań eksploatacyjnych (zwykle robi to producent urządzeń) resurs międzyobsługowy / międzynaprawczy L_m (wielkość miary eksploatacji liczona od zakończenia poprzedniej obsługi / naprawy urządzenia do rozpoczęcia kolejnej jego obsługi / naprawy) oraz resurs całkowity L_p (całkowita wielkość miary eksploatacji, którą urządzenie może zużyć w ciągu swojego „życia”).

Liczba cykli międzyobsługowych / międzynaprawczych jest równa $s = \frac{L_p}{L_m}$.

Urządzenie jest $s - 1$ razy odnawiane przez obsługę / naprawę, a ostatnia odnowa jest odnową inwestycyjną i polega na wymianie urządzenia na nowe.

Użytkowanie zbioru urządzeń z intensywnością α_e wymusza powstanie strumienia odnowy (obsługi / naprawy) (zgłoszeń maszyn do odnowy) o intensywności $\lambda_0 = \frac{\alpha_e}{L_m} = \frac{\alpha_e S}{L_p}$.

E urządzeń znajduje się w systemie odnowy, gotowych do użycia jest M urządzeń. Całkowita liczba urządzeń w systemie eksploatacji wynosi $M + E$.

E urządzeń jest nadwyżką w systemie eksploatacji w stosunku do potrzeb systemu użytku. Jej wielkość zależy od wydajności systemu obsługi / naprawy.

Zwiększenie liczby stanowisk obsługi / naprawy n generalnie zwiększa wydajność systemu obsługi / naprawy i zmniejsza koszt wprowadzenia do systemu eksploatacji większej liczby urządzeń E , ale jednocześnie zwiększa koszt utrzymania większej liczby stanowisk obsługi / naprawy.

Zwiększenie liczby cykli obsługi s obniża wielkość kosztów zakupu nowych urządzeń, ale zwiększa obciążenie systemu obsługi / naprawy.

Rozwiązanie problemu wyboru sposobu odnowy polega na wybraniu takiej liczby cykli międzyobsługowych / międzynaprawczych s oraz liczby stanowisk obsługi / naprawy n , dla których całkowite koszty odnowy potencjału eksploatacyjnego danego parku urządzeń będą najmniejsze.

W celu zapewnienia ciągłości procesu eksploatacji posiadanego parku urządzeń z intensywnością użytkowania α_e należy zapewnić:

- stały dopływ nowych urządzeń w miejsce wycofywanych,
- właściwą wydajność systemu obsługowo-naprawczego.

Generalnie proces użytkowania jest procesem losowym i dostawy urządzeń do systemu obsługi i naprawy przedstawiają pewien strumień losowy, który w większości przypadków można z wystarczającą dokładnością opisać za pomocą prostego strumienia Poissona. Sam proces obsługi / naprawy też ma charakter losowy, a czas obsługi / naprawy można w większości przypadków z wystarczającą dokładnością opisać za pomocą rozkładu wykładniczego.

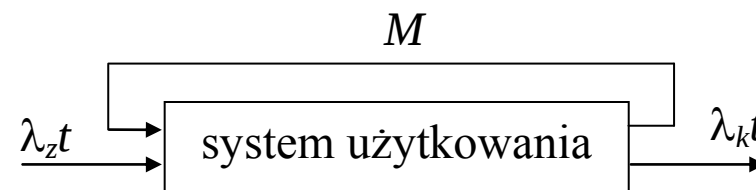
W zależności od wielkości kosztów obsługi / naprawy oraz kosztów zakupu nowych urządzeń można wyróżnić trzy sposoby odnowy potencjału eksploatacyjnego zbioru urządzeń:

1) Odnowa przez zakup nowych urządzeń – gdy koszty zakupu są małe, urządzenia trwałe, a obsługi / naprawy kosztowne (nieopłacalne).

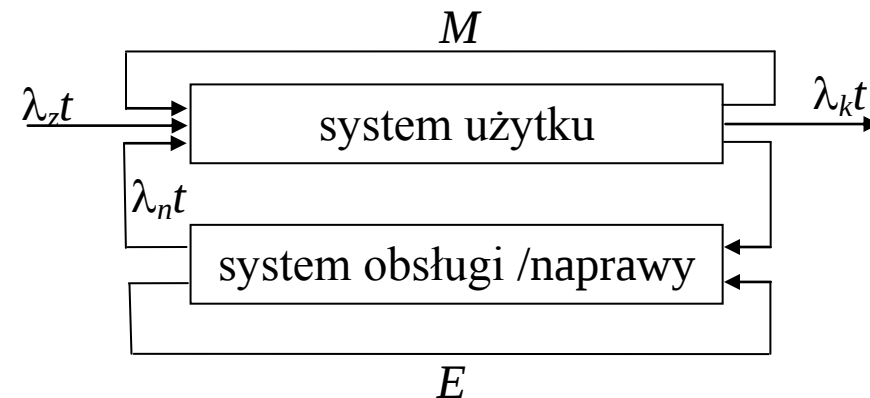
Zużyte urządzenia opuszczają system eksploatacji z intensywnością λ_k .

Na ich miejsce do systemu wchodzi nowe urządzenia z intensywnością $\lambda_z = \lambda_k = \lambda_0$.

Koszty odnowy systemu w czasie t wynoszą $K = K_z \lambda_z t$, K_z – koszt zakupu nowego urządzenia.



2) Odnowa przez zakup nowych urządzeń oraz przez ich obsługę / naprawę – system szeregowy – gdy resurs całkowity urządzeń jest duży w stosunku do resursu międzyobsługowego / międzynaprawczego, a koszty obsługi / naprawy są niskie (obsługa / naprawa jest opłacalna).



Na strumień odnowy systemu użytku składa się strumień dostaw nowych urządzeń równoważący

strumień wycofywania starych urządzeń $\lambda_z = \lambda_k$ oraz strumień maszyn przepływających przez system obsługi / naprawy o intensywności λ_n .

Intensywność strumienia odnowy systemu użytku wynosi $\lambda_0 = \lambda_z + \lambda_n$.

Koszty odnowy systemu w czasie t wynoszą $K = K_z(E + \lambda_z t) + K_{cz} \lambda_n t + (A + K_u)nt$, gdzie:

K_{cz} – koszt części zamiennych jednej obsługi / naprawy,

A – jednostkowy koszt amortyzacji stanowiska obsługowo-naprawczego,

K_u - jednostkowy koszt utrzymania stanowiska obsługowo-naprawczego,

n – liczba stanowisk obsługowo-naprawczych.

3) Odnowa przez zakup nowych urządzeń oraz częściowo przez ich obsługę / naprawę – system równoległy – gdy koszty obsług / napraw są względnie wysokie.

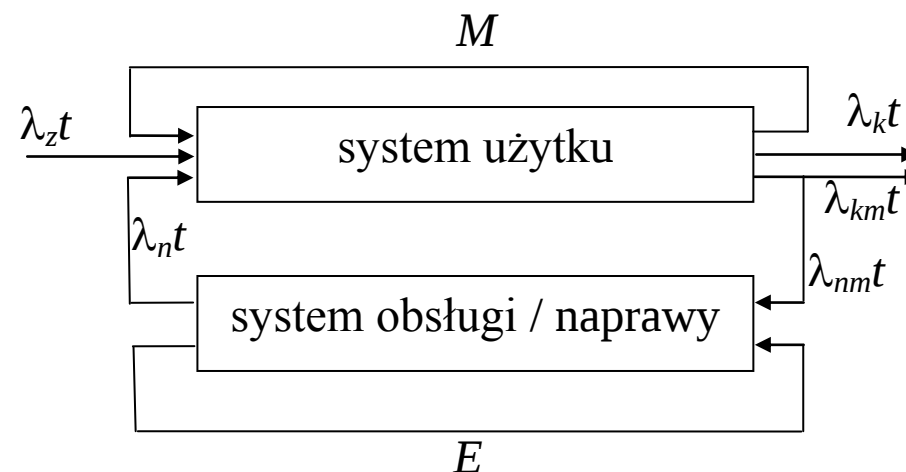
Strumień urządzeń do obsługi / naprawy jest realizowany tylko częściowo i część urządzeń, pomimo jeszcze niewykorzystanego ресурсu całkowitego, jest odnawiana przez

wprowadzenie nowych: $\lambda_z = \lambda_k + \lambda_{km}$.

Intensywność strumienia urządzeń przepływającego przez system obsługi / naprawy, zależna od liczby stanowisk obsługowo-naprawczych n i od intensywności obsług / napraw μ , jest mniejsza od intensywności strumienia urządzeń o wyczerpanym resursie

międzyobsługowym / międzynaprawczym: $\lambda_n = n\mu < \lambda_{km} + \lambda_{nm}$.

Koszty odnowy systemu w czasie t wynoszą $K = K_z(E + \lambda_z t) + K_{cz}\lambda_n t + (A + K_u)nt$ (postać podobna do poprzedniej, ale inna (większa) jest wartość intensywności λ_z).



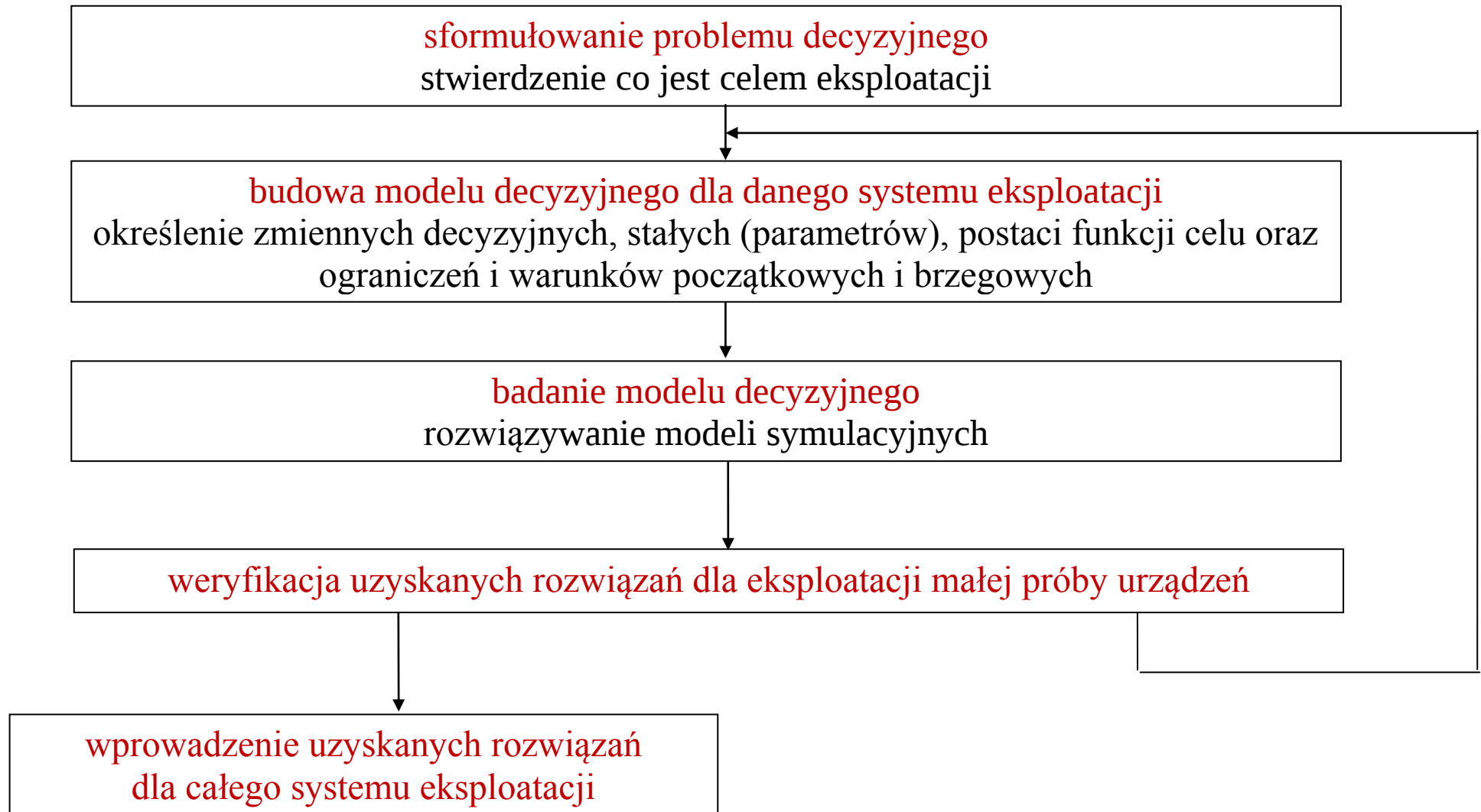
Podejmowanie decyzji (też związanych z planowaniem) jest podstawową funkcją kierowania systemem eksploatacji. Dla podjęcia optymalnej decyzji niezbędne jest posiadanie określonego zbioru informacji charakteryzujących system lub jego element, którego dana decyzja dotyczy, oraz jego otoczenie.

W zakresie decyzyjnym kierowanie eksploatacją powinno:

- znajdować odpowiedzi na pytania i rozwiązywać problemy,
- opracowywać bardziej skuteczne sposoby postępowania lub udowadniać, że aktualna rzeczywistość eksploatacyjna jest najlepsza ze wszystkich możliwych w danych warunkach.

Problem decyzyjny rozwiązywany jest według określonego algorytmu wyznaczonego przez metodę podejmowania decyzji.

Przebieg proces podejmowania decyzji dotyczących eksploatacji urządzeń:



Ze względu na sposób i warunki podejmowania decyzji wyróżnia się następujące metody podejmowania decyzji:

- **intuicyjne** – brak jest danych pozwalających przewidzieć skutki decyzji. Prawdopodobieństwo podjęcia poprawnej decyzji jest zależne od liczby n możliwych wyborów i wynosi $1/n$,
- **pragmatyczne (doświadczalne)** – decyzja jest wynikiem nabytego doświadczenia podczas wielokrotnego podejmowania decyzji dotyczących analogicznych problemów. Skutki decyzji można na ogół przewidzieć; określane są także mianem „rutyny zawodowej”,
- **normatywne** – dany i znany jest zbiór decyzji **D** oraz zbiory warunków determinujących podjęcie określonej decyzji ze zbioru **D**; oznacza to, że fakt wystąpienia danego zbioru warunków wymaga jedynie wyboru odpowiedniej decyzji ze zbioru **D**; przykład: opracowane przez producentów urządzeń instrukcje eksploatacji,

– **analityczne** – dla podjęcia decyzji wymagają wykonania ciągu operacji logicznych lub matematycznych; wykonane operacje pozwalają na ocenę skutków decyzji, a więc także i wybór decyzji optymalnej spośród możliwych; zastosowanie tych metod wymaga ścisłego, formalnego opisu problemu decyzyjnego, czyli tzw. matematycznego modelu decyzyjnego $MMD = \{\mathbf{D}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{F}, \mathbf{P}\}$, którego elementami są:

- **D** - dziedziną – zbiór obiektów (elementów rzeczywistości) i wielkości, których model dotyczy,
- **R** - relacje – zbiór zależności między elementami dziedziny modelu,
- **Z** - założenia – zbiór ograniczeń nałożonych na dziedzinę i relacje modelu,
- **F** - kryterium (funkcja celu) – kryterium optymalizacyjne podejmowanej decyzji,
- **P** - problem decyzyjny – pytanie, na które model decyzyjny powinien odpowiedzieć.

MMD w kierowaniu eksploatacją maszyn bazują na metodach:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------|
| – programowania liniowego | – programowania dynamicznego | – teorii gier |
| – planowania sieciowego | – teorii obsługi masowej | |

– **ekspertów** – stosowane do rozwiązywania złożonych problemów decyzyjnych, gdy dla podjęcia właściwej decyzji niezbędne jest uzyskanie opinii eksperta (lub ekspertów) w danej dziedzinie; pozyskiwanie opinii ekspertów jest organizowane przez decydenta i może mieć formy:

- dyskusji z ekspertem lub z wieloma ekspertami,
- pozyskania opinii i propozycji rozwiązań problemu od ekspertów w postaci odpowiedzi pisemnych na przygotowane wcześniej pytania ankietowe,
- uzyskania opinii od ekspertów połączonego z ich wzajemną anonimową lub jawną oceną, co umożliwia zbliżenie stanowisk ekspertów i wypracowanie rozwiązania kompromisowego gdy początkowo poglądy ekspertów są rozbieżne.

Uproszczoną i sformalizowaną formą podejmowania decyzji metodą ekspertów jest zastosowanie komputerowych programów doradczych – systemów ekspertowych.

Liniowy problem decyzyjny lub **zagadnienie programowania liniowego** – problem decyzyjny, w którym funkcja kryterium (celu) i ograniczenia są funkcjami liniowymi.

Liniowe problemy decyzyjne są najczęściej występującymi problemami w praktyce kierowania eksploatacją urządzeń.

Istnieje wiele algorytmów rozwiązywania zagadnień programowania liniowego dla różnych problemów decyzyjnych. Najczęściej stosuje się:

- metodę graficzną,
- metodę „simplex”,
- metodę transportową.

Przykład: Punkt serwisowy wykonuje obsługę dwóch typów urządzeń: X i Y . Zużycie materiałów eksploatacyjnych a i b przy obsłudze jednego egzemplarza urządzeń jest określone. Znane i ograniczone są posiadane zapasy A i B tych materiałów. Znany jest zysk punktu serwisowego za wykonanie obsługi jednego urządzenia c_X i c_Y . Należy określić liczby urządzeń poszczególnych typów, które punkt serwisowy powinien obsłużyć, aby uzyskać maksymalny zysk.

Elementy matematycznego modelu decyzyjnego:

- **D** - dziedziną modelu – maszyny typu X i Y , materiały eksploatacyjne a i b , zyski z obsługi c_X i c_Y ,
- **R** - relacje modelu – wielkości zużycia materiałów eksploatacyjnych a_X i b_X oraz a_Y i b_Y i zysku za dokonaną obsługę c_X i c_Y ,
- **Z** - założenia (ograniczenia) modelu – posiadane wielkości zapasów A i B materiałów eksploatacyjnych,
- **F** - kryterium modelu – maksymalizacja zysku,
- **P** - problem decyzyjny – wyznaczenie liczb x i y obsłużonych maszyn typu X i Y dających maksymalny zysk.

Wielkości niewiadome – liczby x i y maszyn typu X i Y – **zmienne decyzyjne**, tworzą wektor zmiennych decyzyjnych.

Jeżeli punkt serwisowy wykona obsługę x maszyn typu X i y maszyn typu Y to jej zysk można wyrazić jako $Z = c_X x + c_Y y$. Powinien on uzyskać wartość maksymalną: $Z \rightarrow \max$.

Dopuszczalne zużycia materiałów eksploatacyjnych (ograniczenia) wyrażają nierówności

$$a_X x + a_Y y \leq A \text{ i } b_X x + b_Y y \leq B.$$

Ze względu na charakter rozważanego problemu zmienne decyzyjne powinny przyjmować wartości nieujemne ($x, y \geq 0$) i całkowite.

W przedstawionym problemie decyzyjnym funkcja kryterium $Z \rightarrow \max$ oraz wszystkie ograniczenia są funkcjami liniowymi (zmienne decyzyjne występują w pierwszej potędze).

Sformułowanie liniowego problemu decyzyjnego

Sformułowanie algebraiczne: znaleźć wektor n zmiennych decyzyjnych $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, który optymalizuje (maksymalizuje, minimalizuje) funkcję kryterium (celu) dla zadanych wag c_i :

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max (\min)$$

przy m ograniczeniach:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 (\geq b_1)$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2 (\geq b_2)$$

...

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m (\geq b_m)$$

oraz n warunkach brzegowych:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

gdzie współczynniki: a_{ij} , b_i , c_j są stałe i znane.

Wektor zmiennych decyzyjnych $\mathbf{X}$ jest wektorem w przestrzeni n -wymiarowej, zaś liczba sformułowanych ograniczeń jest równa m .

Sformułowanie macierzowe: znaleźć wektor zmiennych decyzyjnych $\mathbf{X}$, który optymalizuje formę liniową: $Z = f(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \rightarrow \max(\min)$ przy ograniczeniach: $\mathbf{A} \mathbf{X} \leq \mathbf{B}$ i $\mathbf{X} \geq 0$, gdzie:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ - wektor zmiennych decyzyjnych,}$$

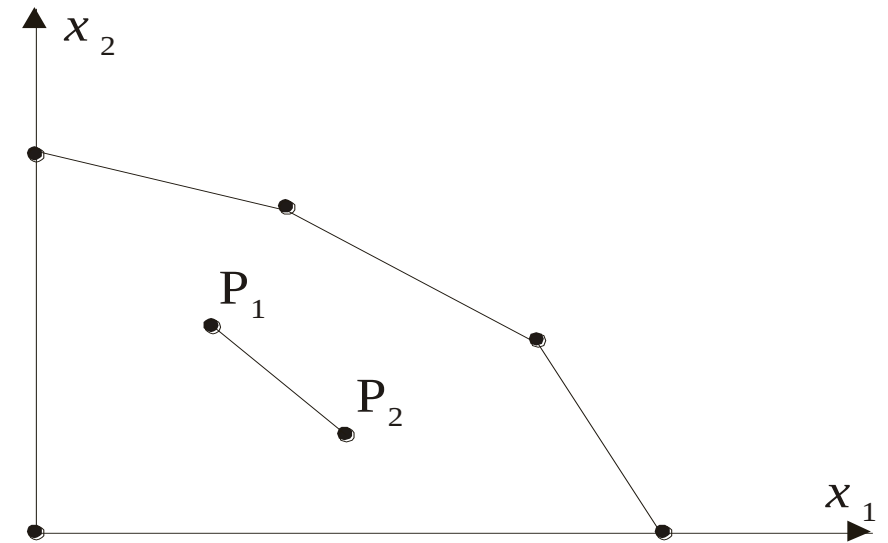
$$\mathbf{C} = [c_1, c_2, \dots, c_n] \text{ - wektor wag (współczynników wagowych),}$$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ - macierz współczynników ograniczeń,}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ - wektor ograniczeń.}$$

Rozwiązanie dopuszczalne zagadnienia programowania liniowego – każdy wektor zmiennych decyzyjnych $\mathbf{X}$, który spełnia zbiór ograniczeń liniowego modelu decyzyjnego.

Zbiór wszystkich rozwiązań dopuszczalnych zagadnienia programowania liniowego jest zbiorem wypukłym.



Twierdzenie Weierstrassa:

Liniowa funkcja celu $Z = f(\mathbf{C}, \mathbf{X})$ przyjmuje wartość optymalną (maksymalną lub minimalną) w punkcie wierzchołkowym zbioru rozwiązań dopuszczalnych.

Jeśli przyjmuje wartość optymalną w więcej niż jednym punkcie wierzchołkowym, to przyjmuje tę samą wartość dla każdej kombinacji liniowej właściwej tych punktów (graficznie: jeśli są to punkty sąsiednie to wartość optymalna jest osiągnięta dla wszystkich punktów odcinka łączącego te punkty wierzchołkowe).

Przedstawione definicje i twierdzenia wskazują dwa charakterystyczne etapy rozwiązania liniowego problemu decyzyjnego:

- 1) określenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych w oparciu o istniejące ograniczenia problemu decyzyjnego,
- 2) badanie wartości funkcji kryterium w punktach wierzchołkowych zbioru rozwiązań dopuszczalnych i wybór jako rozwiązania wartości elementów wektora zmiennych decyzyjnych w tym punkcie, w którym funkcja osiąga wartość optymalną.

Metoda graficzna rozwiązywania zagadnienia programowania liniowego

Metoda graficzna służy do rozwiązywania zagadnień liniowych o co najwyżej trzech, a praktycznie dwóch zmiennych decyzyjnych – rozwiązania poszukuje się wykonując odpowiedni rysunek.

W przestrzeni dwuwymiarowej z kryterium maksymalizacji funkcji celu:

- funkcja celu:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max$$

- ograniczenia:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2$$

...

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \leq b_m$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Ograniczenia problemu decyzyjnego są układem nierówności liniowych – wyznaczenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych polega na znalezieniu obszaru w układzie współrzędnych określonych przez zmienne decyzyjne x_1 i x_2 będącego częścią wspólną półpłaszczyzn będących wykresami rozwiązań nierówności liniowych ograniczeń problemu.

Maksimum funkcji celu Z w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych znajduje się wyznaczając jej gradient (wskazujący kierunek najszybszego wzrostu funkcji) $\text{grad } Z = \left[\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right] = [c_1, c_2]$ i zaczepiając go w początku układu współrzędnych.

Linia prostopadła do kierunku wektora gradientu jest linią ekwipotencjalną (linią stałej wartości funkcji celu). Przesuwając tę linię równolegle w stronę wyznaczoną przez zwrot gradientu w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych znajduje się punkty, w których funkcja celu przyjmuje coraz wyższe wartości. Ostatni przy takim przesuwaniu punkt wspólny (punkty wspólne) linii ekwipotencjalnej i zbioru rozwiązań dopuszczalnych jest punktem, którego współrzędne stanowią poszukiwane rozwiązanie – współrzędne wektora zmiennych decyzyjnych optymalizującego funkcję celu.

Algorytm graficznej metody rozwiązania zagadnienia programowania liniowego:

1. Ograniczenia sprowadzić do postaci odcinkowej równań prostych (zachowując znaki nierówności) – podzielić nierówności ograniczeń obustronnie przez b_i .

$$\text{Stosując podstawienie } \frac{a_{ij}}{b_i} = \frac{1}{\varepsilon_{ij}} \text{ otrzymuje się układ nierówności ograniczeń } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{\varepsilon_{11}} + \frac{x_2}{\varepsilon_{12}} \leq 1 \\ \frac{x_1}{\varepsilon_{21}} + \frac{x_2}{\varepsilon_{22}} \leq 1 \\ \dots \\ \frac{x_1}{\varepsilon_{m1}} + \frac{x_2}{\varepsilon_{m2}} \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

gdzie $\varepsilon_{ij} = \frac{b_i}{a_{ij}}$ oznaczają bezpośrednio współrzędne punktów przecięcia kolejnych prostych i

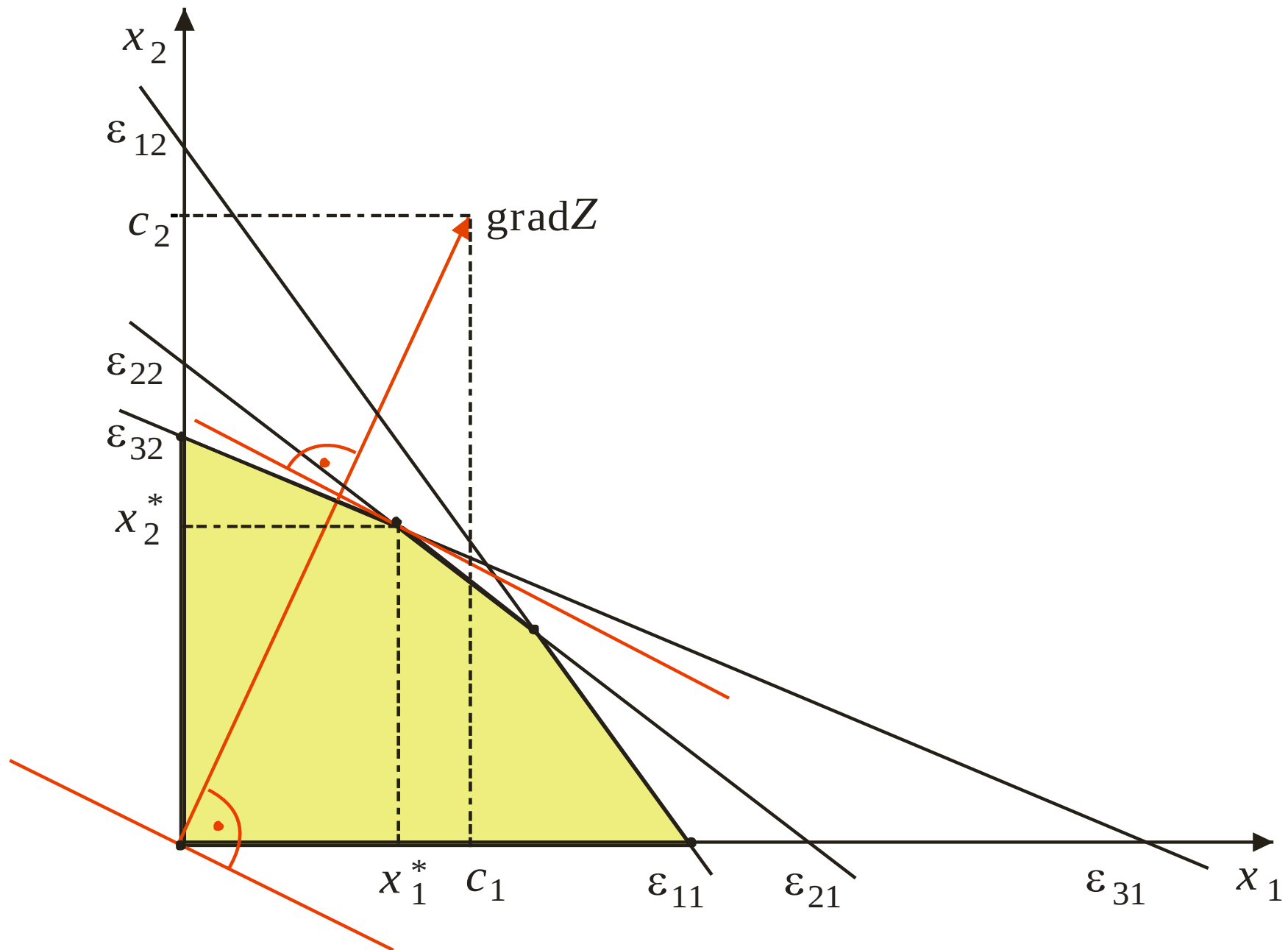
z osiami układu współrzędnych x_j .

2. W układzie współrzędnych x_j wykreślić zbiór rozwiązań dopuszczalnych jako zbiór rozwiązań otrzymanego układu nierówności (jako część wspólną półpłaszczyzn będących rozwiązaniami wszystkich nierówności ograniczeń).
3. Znaleźć współrzędne wektora $\text{grad}Z$.

4. Wyznaczyć kierunek wektora $\text{grad}Z$ na płaszczyźnie w obszarze zbioru rozwiązań dopuszczalnych, np. umieszczając punkt początkowy wektora w początku układu współrzędnych.
5. Wykreślić linię ekwipotencjalną prostopadłą do wektora $\text{grad}Z$ przechodzącą przez punkt początkowy tego wektora.
6. Przesuwać linię ekwipotencjalną równolegle w stronę wzrostu funkcji Z (wzdłuż kierunku i zgodnie ze zwrotem wektora $\text{grad}Z$) aż do jej przejścia przez ostatni punkt wierzchołkowy zbioru rozwiązań dopuszczalnych – punkt ten (lub nieskończenie wiele punktów w przypadku przechodzenia przesuwanej linii przez jednocześnie dwa ostatnie punkty wierzchołkowe zbioru rozwiązań dopuszczalnych (w przypadku prostopadłości odcinka łączącego te dwa punkty i kierunku wektora $\text{grad}Z$)) wyznacza poszukiwane rozwiązanie optymalne $\mathbf{X}^* = [x_1^*, x_2^*]$.

Jeżeli szuka się minimum funkcji celu, linię ekwipotencjalną przesuwana się rozpoczynając od dowolnego punktu wewnętrznego zbioru rozwiązań dopuszczalnych w kierunku przeciwnym do zwrotu wektora $\text{grad}Z$.

Jeżeli dziedziną wektora zmiennych decyzyjnych jest zbiór liczb całkowitych nieujemnych, a uzyskane rozwiązanie optymalne wyrażone jest liczbami wymiernymi, to w celu znalezienia rozwiązania optymalnego konieczne jest badanie wartości funkcji kryterium w punktach należących do obszaru rozwiązań dopuszczalnych o współrzędnych całkowitych znajdujących się w otoczeniu danego punktu wierzchołkowego.



Zagadnienie transportowe z kryterium kosztów

Dany jest zbiór m dostawców zaopatrujących n odbiorców w jednorodny produkt.

Znane są wielkości zapasów w magazynach a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) oraz wielkości potrzeb odbiorców b_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Znane są koszty jednostkowe transportu c_{ij} produktu z magazynu i do odbiorcy j wyrażone macierzą kosztów $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times n}$.

Należy tak zaplanować wielkość dostaw x_{ij} z magazynu i do odbiorcy j , aby całkowite koszty transportu były minimalne.

Wielkości wszystkich dostaw wyrażone są macierzą dostaw (przydziałów) $\mathbf{X} = [x_{ij}]_{m \times n}$.

Jest to problem decyzyjny typowy dla systemu użytkowania środków transportowych (np. dla transportu samochodowego), w którym kryterium optymalizacji decyzji eksploatacyjnej jest koszt transportu.

Wyznaczyć macierz zmiennych decyzyjnych $\mathbf{X} = [x_{ij}]_{m \times n}$, która minimalizuje formę liniową

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ (suma przydziałów z jednego magazynu nie może przekroczyć}$$

wielkości zapasu w tym magazynie),

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j; \quad j = 1, 2, \dots, n \text{ (suma przydziałów do jednego odbiorcy nie może przekroczyć}$$

wielkości zapotrzebowania tego odbiorcy) ,

$$x_{ij} \geq 0.$$

Funkcja celu przedstawia całkowite koszty transportu wyrażone sumą iloczynów kosztów jednostkowych i wielkości dostaw z magazynu i do odbiorcy j .

W przypadku, gdy poszukuje się maksimum funkcji kryterium należy skorzystać z zależności $\max Z = -\min(-Z)$ i w tabeli wpisać elementy macierzy kosztów ze zmienionymi znakami.

Dodatkowo zakłada się konieczność spełnienia tzw. warunku równości podaży i popytu:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j .$$

Jeżeli nie jest on spełniony do zadanego zbioru dostawców lub odbiorców (w zależności od tego czy większa jest podaż czy popyt) dodaje się fikcyjnego dostawcę lub odbiorcę o wielkości zapasu lub zapotrzebowania wynikającej z warunku równości podaży i popytu. Jednostkowe koszty transportu dla takiego fikcyjnego dostawcy lub odbiorcy przyjmuje się jako zerowe, co eliminuje wpływ tego dostawcy lub odbiorcy na funkcję celu.

Jest to liniowy problem decyzyjny. Ze względu na dużą na ogół liczbę zmiennych decyzyjnych (jest ich $m \times n$) i ograniczeń (jest ich $m + n - 1 + m \times n$: m równań ograniczeń dla odbiorców, n równań ograniczeń dla dostawców, 1 warunek równości podaży i popytu, $m \times n$ warunków nieujemności zmiennych decyzyjnych) istnieją specjalne metody jego rozwiązywania, np. MODI (MODified DIstribution method). Są to metody iteracyjne: dokonuje się jakiegoś pierwszego wyboru rozwiązania, a następnie dokonuje się zmian przydziałów, dla których funkcja celu przyjmuje coraz mniejszą wartość aż do osiągnięcia rozwiązania optymalnego.

Metody wyboru rozwiązania początkowego:

- „kąta północno-zachodniego”,
- minimalnego kosztu w kolejnych wierszach lub kolumnach,
- minimalnego elementu macierzy kosztów,
- VAM,
- itd..

Liczba elementów tego rozwiązania powinna być równa $m + n - 1$.

Stopień zbliżenia rozwiązania początkowego do rozwiązania optymalnego ma decydujący wpływ na prędkość metody.

Przekształcenie ekwiwalentne macierzy: niech będzie macierz $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times n}$ oraz dwa ciągi liczb $\mathbf{R} = \{r_i\}, i = 1, 2, \dots, m$ i $\mathbf{S} = \{s_j\}, j = 1, 2, \dots, n$; macierzą ekwiwalentną do macierzy $\mathbf{C}$ nazywa się macierz $\mathbf{D} = [d_{ij}]_{m \times n}$, której elementy są równe $d_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j$.

Klatka - element macierzy przedstawionej w postaci tablicy dla pary liczb $[i, j]$ (współrzędnych: i i j oznaczają odpowiednio numer wiersza i numer kolumny tablicy).

Łańcuch - ciąg klatek (zestaw klatek uporządkowany kolejnością wyboru), w którym występuje na przemian zmiana wierszy i kolumn, np. $[1,1] [1,3] [2,3] [2,1] [3,1] \dots$

Cykl - łańcuch zamknięty, którego pierwszy element jest także ostatnim.

Jeżeli w cyklu oznaczy się kolejne klatki na przemian znakami „+” i „-”, to otrzyma się **półłańcuchy dodatni** złożony z klatek z „+” i **ujemny** złożony z klatek z „-”.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	+	→	-		
2	↑		↓		
3	-	←			+
4			↓		↑
5			+	→	-

cykl: $[1,1] [1,3] [5,3] [5,5] [3,5] [3,1] [1,1]$

półłańcuch dodatni: $[1,1] [5,3] [3,5]$

półłańcuch ujemny: $[1,3] [5,5] [3,1]$

W zagadnieniu transportowym każdej klatce $[i,j]$ odpowiada jeden element macierzy kosztów $\mathbf{C}$ i jeden element macierzy dostaw $\mathbf{X}$ - każdy zestaw klatek jest zestawem elementów c_{ij} oraz x_{ij} .

Wybór – zbiór niezerowych elementów rozwiązania $\mathbf{X}$ razem z zerami wybranymi, które uzupełniają go do zestawu $m + n - 1$ klatek, dla którego realizuje się dostawy.

Zera wybrane – elementy zerowe rozwiązania $\mathbf{X}$ położone w klatkach zestawu $m + n - 1$ klatek wybranych.

Elementy kosztów wybrane przez $\mathbf{X}$ – elementy c_{ij} macierzy kosztów $\mathbf{C}$, odpowiadające elementom macierzy dostaw określonym przez dane rozwiązanie.

Algorytm metody rozwiązania transportowego zagadnienia programowania liniowego
z kryterium kosztów:

1. Sprawdzić spełnienie warunku równości podaży i popytu: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ i w przypadku jego

niespełnienia:

- jeżeli podaż jest większa od popytu, to do problemu należy wprowadzić dodatkowego fikcyjnego odbiorcę o zapotrzebowaniu $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ i kosztach dostaw $c_{i,n+1} = 0$,
- jeżeli podaż jest mniejsza od popytu, to do problemu należy wprowadzić dodatkowy fikcyjny magazyn o wielkości zapasów $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ i kosztach dostaw $c_{m+1,j} = 0$.

Dla ostatecznie określonej liczby odbiorców i magazynów warunki zadania przedstawić w postaci tablicy liczbowej.

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

2. Dokonać wyboru pierwszego rozwiązania $\mathbf{X}_1$.

Metoda „kąta północno-zachodniego” (górnego lewego rogu macierzy kosztów) – przydział rozpoczyna się od klatki $[1,1]$, w której dokonuje się przydziału x_{11} wpisując jego wartość w prawym dolnym rogu klatki. Możliwe są trzy przypadki:

1. $a_1 < b_1$ – dokonuje się przydziału $x_{11} = a_1$ i przechodzi do następnego wiersza, bo zapas dostawcy jest już zerowy,
2. $a_1 > b_1$ – dokonuje się przydziału $x_{11} = b_1$ i przechodzi w tym wierszu do klatki $[1,2]$ i dokonuje się przydziału pozostałości zapasu dostawcy $\Delta a_1 = a_1 - b_1$ kolejnemu odbiorcy: $x_{12} = \Delta a_1$ (jeżeli $\Delta a_1 < b_2$) lub $x_{12} = b_2$ (jeżeli $\Delta a_1 > b_2$). W pierwszym przypadku przechodzi się do następnego wiersza, w drugim powtarza rozumowanie dla klatki $[1,3]$. Do następnego wiersza przechodzi się po wyczerpaniu zapasu dostawcy,
3. $a_1 = b_1$ (lub reszta w magazynie – dotyczy przypadku 2 – jest równa zapotrzebowaniu kolejnego odbiorcy) – dokonuje się przydziału $x_{11} = a_1$ i w kolejnej klatce w tym wierszu dokonuje się przydziału $x_{12} = 0$ (tzw. zero wybrane) i przechodzi do następnego wiersza. Zera wybranego nie wpisuje się w ostatnim wierszu.

Po dokonaniu przydziału liczba elementów niezerowych wyboru (wraz z zerami wybranymi) powinna być równa $m + n - 1$.

$a_i \backslash b_j$	80	40	100	80
150	6 80	10 40	7 30	11
80	8	12	6 70	17 10
70	7	8	13	19 70

Wartość funkcji celu

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} =$$

$$= 6 \cdot 80 + 10 \cdot 40 + 7 \cdot 30 + 11 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 6 \cdot 70 + 17 \cdot 10 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 13 \cdot 0 + 19 \cdot 70 =$$

$$= 3010$$

Metoda minimalnego kosztu w kolejnych wierszach (kolumnach) – przydział odbywa się kolejno wierszami z góry lub dołu (kolumnami z lewa lub prawa) w kolejności rosnących kosztów jednostkowych branych dla danego wiersza (kolumny) z uwzględnieniem potrzeb odbiorców, zapasów dostawców i dotychczasowych przydziałów, a w ostatnim wierszu (kolumnie) uzupełnia się brakujące przydziały tak aby wyczerpać zapas dostawców i zaspokoić potrzeby odbiorców. Dokonując przydziału wierszami od góry do dołu w pierwszym wierszu wyznacza się klatkę, w której c_{1j} jest najmniejszy. Możliwe są trzy przypadki:

1. $a_1 < b_j$ – dokonuje się przydziału $x_{1j} = a_1$ i przechodzi do następnego wiersza, bo zapas dostawcy jest już zerowy,
2. $a_1 > b_j$ – dokonuje się przydziału $x_{1j} = b_j$ i znajduje w tym wierszu element c_{1j} o kolejnej większej wartości i dokonuje przydziału pozostałości zapasu dostawcy $\Delta a_1 = a_1 - b_j$ kolejnemu odbiorcy o kolejno większych kosztach: $x_{1j} = \Delta a_1$ (jeżeli $\Delta a_1 < b_j$) lub $x_{1j} = b_j$ (jeżeli $\Delta a_1 > b_j$). W pierwszym przypadku przechodzi się do następnego wiersza, w drugim powtarza rozumowanie dla kolejnej klatki z kolejno większymi kosztami. Do następnego wiersza przechodzi się po wyczerpaniu zapasu dostawcy,
3. $a_1 = b_j$ (lub reszta w magazynie – dotyczy przypadku 2 – jest równa zapotrzebowaniu kolejnego odbiorcy) – dokonuje się przydziału: $x_{1j} = a_1$, znajduje klatkę w tym wierszu z następnymi wartościami kosztów i dokonuje przydziału $x_{12} = 0$ (tzw. zero wybrane) i przechodzi do następnego wiersza. Zera wybranego nie wpisuje się w ostatnim wierszu.

Jeżeli zapotrzebowanie odbiorcy zostało już zaspokojone, w danej kolumnie nie należy dokonywać żadnego przydziału – nawet zera wybranego. W wierszu ostatnim jedynym kryterium przydziału jest równość popytu i podaży. Po dokonaniu przydziału liczba elementów niezerowych wyboru (wraz z zerami wybranymi) powinna być równa $m + n - 1$.

$a_i \backslash b_j$	80	40	100	80
150	6 80	10	7 70	11
80	8	12 40	6 30	17 10
70	7	8	13	19 70

Wartość funkcji celu

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} =$$

$$= 6 \cdot 80 + 10 \cdot 0 + 7 \cdot 70 + 11 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 12 \cdot 40 + 6 \cdot 30 + 17 \cdot 10 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 13 \cdot 0 + 19 \cdot 70 =$$

$$= 3130$$

Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów – przydział następuje w kolejności rosnących kosztów jednostkowych branych dla całej tabeli, z uwzględnieniem potrzeb odbiorców, zapasów dostawców i dotychczasowych przydziałów. Możliwe są trzy przypadki:

1. $a_i < b_j$ – dokonuje się przydziału $x_{ij} = a_i$ i przechodzi do kolejnej klatki o kolejno większych kosztach, oznaczając jednocześnie dostawcę a_i jako pustego,
2. $a_i > b_j$ – dokonuje się przydziału $x_{ij} = b_j$ i znajduje w tym wierszu element c_{ij} o kolejnej większej wartości i dokonuje przydziału pozostałości zapasu dostawcy $\Delta a_i = a_i - b_j$ kolejnemu odbiorcy o tych kolejno większych kosztach: $x_{ij} = \Delta a_i$ (jeżeli $\Delta a_i < b_j$) lub $x_{ij} = b_j$ (jeżeli $\Delta a_i > b_j$), oznaczając jednocześnie odbiorcę b_j jako zapełnionego,
3. $a_i = b_j$ (lub reszta w magazynie – dotyczy przypadku 2 – jest równa zapotrzebowaniu kolejnego odbiorcy) – należy dokonać przydziału: $x_{ij} = a_i$, a po zakończeniu przydziału znaleźć klatkę z kolejną wartością kosztów i dokonać przydziału $x_{ij} = 0$ (tzw. zero wybrane). Zera wybranego nie wpisuje się w ostatnim przydziale.

Po dokonaniu przydziału liczba elementów niezerowych wyboru (wraz z zerami wybranymi) powinna być równa $m + n - 1$.

$a_i \backslash b_j$	80	40	100	80
150	6 80	10 #	7 20	11 50
80	8 #	12 #	6 80	17 #
70	7 #	8 40	13 #	19 30

Wartość funkcji celu

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} =$$

$$= 6 \cdot 80 + 10 \cdot 0 + 7 \cdot 20 + 11 \cdot 50 + 8 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 6 \cdot 80 + 17 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 40 + 13 \cdot 0 + 19 \cdot 30 =$$

$$= 2540$$

Metoda VAM (Vogel's approximation method) – przydział następuje w kolejności rosnących przyrostów kosztów jednostkowych wyznaczonych dla jeszcze nie zapisanych przydziałami wierszy i kolumn. Dla wiersza lub kolumny o największym przyroście kosztów dokonuje się przydziału w klatce o kosztach najniższych. Możliwe są trzy przypadki:

1. $a_i < b_j$ – dokonuje się przydziału $x_{ij} = a_i$ i wyznacza od nowa przyrosty kosztów ignorując wiersz o numerze i (zapas dostawcy i wyczerpany),
2. $a_i > b_j$ – dokonuje się przydziału $x_{ij} = b_j$ i wyznacza od nowa przyrosty kosztów ignorując kolumnę o numerze j (potrzeby odbiorcy j zaspokojone),
3. $a_i = b_j$ – dokonuje się przydziału: $x_{ij} = a_i = b_j$ i wyznacza od nowa przyrosty kosztów ignorując wiersz o numerze i i kolumnę o numerze j .

Po dokonaniu przydziału liczba elementów niezerowych wyboru (wraz z zerami wybranymi dopisanymi w zasadzie dowolnie) powinna być równa $m + n - 1$.

$a_i \backslash b_j$	80	40	100	80	
150	6	10	7	11	$ 6-7 =1$
80	8	12	6	17	$ 6-8 =2$
70	7	8	13	19	$ 7-8 =1$
	$ 6-7 =1$	$ 8-10 =2$	$ 6-7 =1$	$ 11-17 =6$	

$a_i \backslash b_j$	80	40	100	80	
150	6	10	7	11	$ 6-7 =1$
80	8	12	6		$ 6-8 =2$
70	7	8	13		$ 7-8 =1$
	$ 6-7 =1$	$ 8-10 =2$	$ 6-7 =1$	X	

$a_i \backslash b_j$	80	40	100	80	
150	6	10	7	11	$ 6-7 =1$
			20	80	
80			6		X
			80		
70	7	8	13		$ 7-8 =1$
	$ 6-7 =1$	$ 8-10 =2$	$ 7-13 =6$	X	

$a_i \backslash b_j$	80	40	100	80	
150	6	10	7	11	$ 6-10 =4$
	50		20	80	
80			6		X
			80		
70	7	8			$ 7-8 =1$
	$ 6-7 =1$	$ 8-10 =2$	X	X	

$a_i \backslash b_j$	80	40	100	80	
150	6 50		7 20	11 80	X
80			6 80		X
70	7 30	8 40			$ 7-8 =1$
	$ 7-? =?$	$ 8-? =?$	X	X	

Wartość funkcji celu

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} =$$

$$= 6 \cdot 50 + 10 \cdot 0 + 7 \cdot 20 + 11 \cdot 80 + 8 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 6 \cdot 80 + 17 \cdot 0 + 7 \cdot 30 + 8 \cdot 40 + 13 \cdot 0 + 19 \cdot 0 =$$

$$= 2330$$

3. Wykonać przekształcenie ekwiwalentne macierzy kosztów tak, aby koszty w klatkach wybranych określonych dla rozwiązania $\mathbf{X}_r$ wyzerowały się. Wyrazy ciągów $\mathbf{R} = \{r_i\}$ i $\mathbf{S} = \{s_j\}$ można znaleźć rozwiązując układ równań $c_{ij}^w + r_i + s_j = 0$ gdzie c_{ij}^w są kosztami w klatkach wybranych. Układ ten składa się z $m + n - 1$ równań (tyle jest kosztów c_{ij}^w), niewiadomych jest $m + n$ (tyle jest poszukiwanych liczb r_i i s_j), więc rozwiązuje się go w funkcji jednej z niewiadomych przyjmując jej wartość. Najczęściej przyjmuje się $r_1 = 0$ (co wydaje się po prostu najprostsze). Efekt:

- jednostkowe koszty transportu w klatkach wybranych przez przydział (rozwiązanie) $\mathbf{X}_r$ są równe zero ($c_{ij}^w = 0$),
- jednostkowe koszty transportu w klatkach nie wybranych przez przydział $\mathbf{X}_r$ są dodatnie, zerowe lub ujemne (zależnie od rozwiązywanego zagadnienia),
- funkcja celu obliczona dla takich nowych kosztów i aktualnego przydziału

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = 0.$$

Jeżeli w przekształconej macierzy kosztów występują wartości ujemne, to gdyby zmienić rozwiązanie tak, aby zrealizować przydział od dostawcy do odbiorcy o takich ujemnych kosztach jednostkowych to funkcja celu $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \leq 0$, czyli dokonano by optymalizacji

rozwiązania przez lepsze spełnienie celu $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$. Kryterium wykonania kolejnej iteracji w algorytmie metody rozwiązania transportowego zagadnienia programowania liniowego z kryterium kosztów:

Jeżeli w wyniku dokonanego przekształcenia ekwiwalentnego macierzy kosztów pozostałe elementy macierzy kosztów (te w klatkach wybranych są oczywiście zerami) są:

- ***nieujemne ($c_{ij} \geq 0$) to otrzymane rozwiązanie X_r jest optymalne,***
- ***zerowe ($c_{ij} = 0$) to istnieją inne rozwiązania o tej samej wartości funkcji celu,***
- ***ujemne ($c_{ij} < 0$) to otrzymane rozwiązanie X_r nie jest optymalne i należy dokonać optymalizacji rozwiązania poprzez odpowiednią zmianę przydziału zapasów od dostawców do odbiorców.***

4. Spośród ujemnych elementów c_{ij} ekwiwalentnie przekształconej, nowej macierzy kosztów znaleźć element najmniejszy. Klatkę, w której ten element występuje oznaczyć znakiem „+”.
5. Rozpoczynając od tej klatki oznaczonej „+”, w oparciu o elementy wybrane przez aktualny przydział (niekoniecznie wszystkie) zbudować **cykl optymalizujący**, oznaczając na przemian klatki tego cyklu znakami „-” i „+”. Otrzyma się w ten sposób łańcuchy dodatni i ujemny.
6. W łańcuchu ujemnym znaleźć najmniejszą wartość dostaw x_{ij}^m (może to być zero wybrane) i przenieść ją po wszystkich klatkach cyklu, tzn. dodać lub odjąć ją zgodnie ze znakiem klatki do aktualnej wartości x_{ij} dostawy w tej klatce – otrzyma się nowe zoptymalizowane wartości przydziałów – kolejne rozwiązanie $\mathbf{X}_{r+1}$ zagadnienia transportowego z kryterium kosztów.
7. Zbudować nową tablicę, wpisując do niej elementy przekształconej ekwiwalentnie macierzy kosztów oraz elementy zmienionego, nowego rozwiązania $\mathbf{X}_{r+1}$ (wraz z zerami wybranymi powinno ich być $m + n - 1$) i powrócić do punktu 3 algorytmu.

W każdym kroku rozwiązania (też ostatnim dającym rozwiązanie optymalne) wartość rzeczywistej funkcji celu można wyznaczyć tylko na podstawie wyjściowej macierzy kosztów i elementów danego wyboru.

Dla przydziału

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

układ $m + n - 1$ równań $c_{ij}^w + r_i + s_j = 0$ potrzebny do wyznaczenia wyrazów ciągów **R** i **S** potrzebnych do przekształcenia ekwiwalentnego macierzy kosztów

$$c_{14} + r_1 + s_4 = 2 + r_1 + s_4 = 0$$

$$c_{23} + r_2 + s_3 = 6 + r_2 + s_3 = 0$$

$$c_{21} + r_2 + s_1 = 4 + r_2 + s_1 = 0$$

$$c_{33} + r_3 + s_3 = 4 + r_3 + s_3 = 0$$

$$c_{22} + r_2 + s_2 = 1 + r_2 + s_2 = 0$$

$$c_{34} + r_3 + s_4 = 3 + r_3 + s_4 = 0$$

$$r_1 = 0$$

$$\mathbf{R} = \{0, -3, -1\} \text{ i } \mathbf{S} = \{-1, 2, -3, -2\}$$

Dla klatek wybranych $c_{ij}^w + r_i + s_j = 0$

Dla pozostałych: $c_{11} + r_1 + s_1 = 8 + 0 - 1 = 7$

$$c_{12} + r_1 + s_2 = 3 + 0 + 2 = 5$$

$$c_{13} + r_1 + s_3 = 5 + 0 - 3 = 2$$

$$c_{24} + r_2 + s_4 = 7 - 3 - 2 = 2$$

$$c_{31} + r_3 + s_1 = 1 - 1 - 1 = -1$$

$$c_{32} + r_1 + s_1 = 9 - 1 + 2 = 10$$

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	7	5	2	0
15	0	0	0	2
25	-1	10	0	0

W ekwiwalentnie przekształconej macierzy kosztów znajduje się jeden element o wartości ujemnej $c_{31} = -1$, co oznacza, że rozwiązanie nie jest optymalne

Klatkę [3,1] oznacza się znakiem „+” .

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	7	5	2	0
15	0	0	0	2
25	-1	10	0	0

W oparciu o klatki zawierające elementy wybrane buduje się cykl optymalizujący rozpoczynając od wymienionej klatki [3,1]. Jedyнным możliwym do utworzenia cyklem jest cykl składający się z klatek [3,1] [2,1] [2,3] [3,3] [3,1]. Kolejne klatki cyklu oznacza się na przemian znakami „-” i „+”.

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	7	5	2	0
15	0	0	0	2
25	-1	10	0	0

Diagram illustrating the cycle construction process on the cost matrix. Red arrows show the path from cell (3,1) to (2,1), then to (2,3), then to (3,3), and finally back to (3,1). Green circles with '+' and '-' signs indicate the alternating signs for the cycle cells. The values in the cells are: (3,1) = -1, (2,1) = 5, (2,3) = 0, (3,3) = 20.

Najmniejszą wartością dostaw w półłańcuchu ujemnym (klatki [2,1] i [3,3]) jest $x_{21} = 5$. Przenosi się tę wartość po wszystkich klatkach cyklu, dodając lub odejmując ją od wartości x_{ij} . Poprzednie wartości x_{ij} skreśla się, a nowe wartości $x_{31} = 5$, $x_{21} = 0$ (zwykle, nie wybrane, nie wpisywane do tabeli), $x_{31} = 5$ i $x_{33} = 15$ wpisuje obok.

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	7	5	2	0
15	0	0	0	2
25	-1	10	0	0

Diagram illustrating the cycle adjustment in the transportation problem. The cycle consists of cells (2,1), (2,3), (3,3), and (3,1). The adjustment value is 5. The changes are as follows:

- Cell (2,1): $0 \oplus 5 = 5$ (green circle with plus, blue 5)
- Cell (2,3): $0 \ominus 5 = -5$ (green circle with minus, blue 5)
- Cell (3,3): $0 \oplus 5 = 5$ (green circle with plus, blue 5)
- Cell (3,1): $-1 \ominus 5 = -6$ (green circle with minus, blue 5)

Red arrows indicate the flow of the adjustment value 5 along the cycle: (2,1) to (2,3), (2,3) to (3,3), (3,3) to (3,1), and (3,1) to (2,1).

Sprawdza się optymalność nowego rozwiązania rozwiązując układ $m + n - 1$ równań $c_{ij}^w + r_i + s_j = 0$ potrzebny do wyznaczenia wyrazów ciągów **R** i **S** potrzebnych do przekształcenia ekwiwalentnej macierzy kosztów itd..

Zagadnienie transportowe z kryterium czasu

Problem transportowy: tak wybrać sposób realizacji dostaw zapasów od m dostawców do n odbiorców, aby czas tej realizacji był najkrótszy.

Dana jest macierz czasów realizacji dostaw $\mathbf{T} = [t_{ij}]_{m \times n}$ od dostawców i do odbiorców j .

Zakłada się, że liczba środków transportowych jest wystarczająca do jednorazowej realizacji dostaw wszystkich zapasów.

Ograniczenia problemu transportowego z kryterium czasu są identyczne jak w problemie

transportowym z kryterium kosztów:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Obowiązuje także warunek równości podaży i popytu.

Dla kryterium czasu czasem realizacji dostawy jest czas najdłuższej dostawy dla danego przydziału $\mathbf{X}$: $t_{\mathbf{X}} = \max_{t_{ij} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}} \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$ (pod uwagę bierze się tylko czasy t_{ij} z klatek z dodatnimi wartościami dostawy zapasu $x_{ij} > 0$).

Spośród wszystkich możliwych rozwiązań realizacji dostaw $\mathbf{X}$ optymalnym rozwiązaniem $\mathbf{X}_{\text{opt}}$ jest to, dla którego czas $t_{\mathbf{X}}$ ma wartość minimalną: $t_{\mathbf{X}_{\text{opt}}} = \min_{\mathbf{X} \in \Omega} t_{\mathbf{X}}$ (Ω jest zbiorem tych możliwych rozwiązań).

Ostatecznie funkcję celu zagadnienia transportowego z kryterium czasu można więc zapisać w postaci $t_{\mathbf{X}_{\text{opt}}} = \min_{\mathbf{X} \in \Omega} \left(\max_{t_{ij} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}} \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \right)$.

Algorytm metody rozwiązania transportowego zagadnienia programowania liniowego
z kryterium czasu:

1. Sprawdzić spełnienie warunku równości podaży i popytu. Zapisać problem w tablicy liczbowej (jak dla kryterium kosztów).
2. Dokonać wyboru pierwszego rozwiązania (jak dla kryterium kosztów z wyjątkiem konieczności wpisywania zer wybranych).
3. Dla aktualnego rozwiązania $\mathbf{X}_r$ wybrać czas $t_{\mathbf{X}} = \max_{t_{ij} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}} \mathbf{T}_{\mathbf{X}}$ i usunąć (wykreślić) z tablicy wszystkie klatki, w których czas $t_{ij} > t_{\mathbf{X}}$ (wybór tych klatek może tylko zwiększyć czas realizacji dostawy – pogorszyć optymalność kolejnego rozwiązania). Klatkę, w której występuje czas $t_{\mathbf{X}}$ oznaczyć znakiem „–”.
4. Rozpoczynając od tej klatki oznaczonej „–”, w oparciu o klatki nie wykreślone z tablicy (niekoniecznie wszystkie) zbudować **cykl rozładowujący**, oznaczając na przemian kolejne klatki tego cyklu znakami „+” i „–”. Otrzyma się w ten sposób łańcuchy dodatni i ujemny.

5. W pólńańcuchu ujemnym znaleźć najmniejszą niezerową wartość dostaw x_{ij} i przenieść ją po wszystkich klatkach cyklu, dodając lub odejmując ją zgodnie ze znakiem klatki do aktualnej wartości x_{ij} dostawy w tej klatce otrzymując nowe wartości przydziałów.
- Jeżeli przenoszony przydział ma wartość równą wartości znajdującej się w rozładowywanej klatce zawierającej czas t_x to otrzymuje się nowe rozwiązanie $\mathbf{X}_{r+1}$ o mniejszym czasie realizacji.
 - Jeżeli przenoszony przydział ma wartość mniejszą od wartości znajdującej się w rozładowywanej klatce zawierającej czas t_x to należy budować kolejne cykle rozładowujące aż do całkowitego rozładowania klatki zawierającej czas t_x – aż do otrzymania nowego rozwiązania $\mathbf{X}_{r+1}$ o mniejszym czasie realizacji.
 - *Jeżeli nie można zbudować cyklu rozładowującego (zerującego wartość przydziału w klatce zawierającej czas t_x), to otrzymane rozwiązanie jest optymalne.*
6. Zbudować nową tablicę, wpisując do niej elementy macierzy czasu i elementy nowego rozwiązania $\mathbf{X}_{r+1}$ i zaznaczając w niej klatki wykreślone i powrócić do punktu 3 algorytmu.

Dla przydziału

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	1 5	9	4	3 5
15	4	1 10	6 5	7
25	8	3	5 15	2 10

Najdłuższym czasem dostawy jest $t_{23} = 6$. Wykreśla się z tablicy klatki zawierające czasy dłuższe – są to klatki z $t_{12} = 9$, $t_{24} = 7$, $t_{31} = 8$.

Klatkę [2,3] oznacza się znakiem „−”.

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	1	9	4	3
15	4	1	6	7
25	8	3	5	2

Rozpoczynając od klatki [2,3] oznaczonej „−”, w oparciu o klatki nie wykreślone z tablicy (niekoniecznie wszystkie) buduje się cykle rozładowujące. Możliwy cykl [2,3] [3,3] [3,2] [2,2] [2,3] nie jest cyklem rozładowującym, ponieważ najmniejszą wartością przydziału w pętli ujemnej byłby przydział $x_{32} = 0$, a przenoszenie zera nie zmienia rozwiązania. Cyklem rozładowującym jest [2,3] [2,1] [1,1] [1,3] [2,3].

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	1	9	4	3
15	4	1	6	7
25	8	3	5	2

Diagram illustrating a transportation problem solution. The table shows supply (a_i) and demand (b_j) values. The current solution is shown with blue shaded cells. A cycle is highlighted with red arrows and green circles containing $\oplus$ and $\ominus$ signs, indicating the flow of adjustments.

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	1	9	4	3
15	4	1	6	7
25	8	3	5	2

Diagram illustrating the same transportation problem solution as above, but with the value 5 added to the cells in the cycle (indicated by blue arrows and the number 5 next to the green circles).

W pólńańcuchu ujemnym najmniejszą niezerową wartością dostaw jest $x_{23} = x_{11} = 5$. Przenosi się ją po wszystkich kłatkach cyklu, dodając lub odejmując go od wartości x_{ij} .

W nowej tablicy najdłuższym czasem dostawy jest $t_{33} = 5$. Wykreśla się z tablicy klatki zawierające czasy dłuższe, w tym poprzednio rozładowaną klatkę z $t_{23} = 6$.

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	1	9	4	3
15	4	1	6	7
25	8	3	5	2

Klatkę [3,3] oznacza się znakiem „−”. Niestety nie można dla niej zbudować cykli rozładowujących, co oznacza, że aktualne rozwiązanie jest optymalne. Najkrótszym możliwym czasem dostawy jest 5 jednostek czasu:

$$t_{\mathbf{Xopt}} = \min_{\mathbf{X} \in \Omega} \left(\max_{t_{ij} \in \mathbf{T}_{\mathbf{X}}} \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \right) = \min \{ \max \{1, 3, 1, 6, 5, 2\}, \max \{4, 3, 4, 1, 5, 2\} \} = \min \{6, 5\} = 5$$

Problem przydziału

Czasem przed kierownictwem eksploatacji stoi problem optymalnego przydziału lub przyporządkowania:

- pracowników do pracy na różnych stanowiskach obsługowych lub naprawczych, gdy znane są wydajności ich pracy na tych stanowiskach,
- operatorów do sterowania danymi typami urządzeń w systemie użytkowania (operacyjnym systemu eksploatacji), jeżeli znana jest miara ich przydatności do sterowania tymi urządzeniami,
- wykonawców do wykonywania określonych zadań, gdy znana jest miara ich przydatności do tych zadań,
- usługodawców zewnętrznych do zrealizowania kilku usług, gdy znane są miary opłacalności korzystania z różnych usług tych usługodawców.

Problem przydziału można sprowadzić do zagadnienia transportowego, w którym wielkość zapasów w każdym magazynie jest równa 1, zapotrzebowanie każdego odbiorcy jest także równe 1, a zmienne decyzyjne mogą przyjmować tylko dwie wartości:

- $x_{ij} = 1$ - oznacza, że dokonano przydziału elementu i do zadania j ,
- $x_{ij} = 0$ - oznacza, że elementu i nie przydzielono do wykonania zadania j .

Może być poszukiwane maksimum lub minimum funkcji celu, a sens fizyczny macierzy $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times n}$ jest zależny od rodzaju danego zagadnienia.

Sformułowanie problemu przydziału: znaleźć macierz zmiennych decyzyjnych $\mathbf{X} = [x_{ij}]_{m \times n}$, która optymalizuje formę liniową:

$$- Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max(\min) \text{ dla kryterium kosztów,}$$

$$- t_{\mathbf{Xopt}} = \min_{\mathbf{X} \in \Omega} \left(\max_{t_{ij} \in \mathbf{T}_X} \mathbf{T}_X \right) \text{ dla kryterium czasu,}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1; \quad i = 1, 2, \dots, m,$$
$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n,$$
$$x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Metoda rozwiązania problemu przydziału jest identyczna jak zagadnienia transportowego z kryterium kosztów gdy poszukuje się najtańszego rozwiązania oraz z kryterium czasu gdy poszukuje się najszybszego rozwiązania.

Obowiązuje także warunek równości podaży i popytu, który wymusza równość liczby dostawców m i liczby odbiorców n . Dla zagadnienia transportowego z kryterium kosztów daje to też m przydziałów równych 1 i $m - 1$ przydziałów równych zero wybranemu, aby operować $m + n + 1$ równaniami przy wyznaczaniu ciągów $\mathbf{R}$ i $\mathbf{S}$ potrzebnych do przekształceń ekwiwalentnych macierzy kosztów.

Metody analizy sieciowej powstały na przełomie XIX i XX wieku, kiedy zauważono, że właściwa organizacja pracy podczas realizacji złożonych przedsięwzięć jest jednym z istotnych warunków efektywności działania człowieka.

Prekursorami tej dziedziny wiedzy byli prof. Karol Adamiecki z Politechniki Warszawskiej oraz amerykański inżynier Henry Gantt – znane jest pojęcie wykresów, planów pracy, harmonogramów Gantta-Adamieckiego.

Metody analizy sieciowej mogą być wykorzystane w:

- analizie i planowaniu realizacji złożonych przedsięwzięć i budowie harmonogramów czynności (w tym także przedsięwzięć obsługowo-naprawczych urządzeń),
- badaniu natężenia procesów eksploatacyjnych, np. natężenia ruchu urządzeń, potoków energii i masy w sieciach przesyłowych (komunikacyjnych, logistycznych, energetycznych, rurociągach),
- analizie przepustowości i badaniu natężenia przesyłania informacji w sieciach łączności,
- wyborze optymalnych połączeń, np. komunikacyjnych dla zadanej sieci dróg czy przesyłu informacji dla zadanej sieci łączności,
- modelowaniu struktur organizacyjnych systemów zarządzania i zaopatrzenia,
- planowaniu przebiegu postępowania w przypadkach wystąpienia sytuacji krytycznej,
- itp..

W analizie sieciowej **algorytm realizacji zadania przedstawia się graficznie** w postaci tzw. **sieci działania**. Sieć przedstawia:

- pewne stany (**zdarzenia**) istotne w trakcie realizacji zadania – w postaci **węzłów** (wierzchołków),
- powiązania między nimi, a więc **czynności** umożliwiające zmianę stanu – za pomocą odcinków (łuków, **strzałek**).

Sieć zawiera także opisy dające dodatkowe informacje o realizowanych działaniach, a w szczególności **czas trwania poszczególnych działań**.

Przedmiotem analizy sieciowej jest planowanie i sterowanie realizacją tzw. projektów.

Przez projekt rozumie się zbiór czynności powiązanych ze sobą określoną kolejnością wykonania, a składających się razem na pewne większe przedsięwzięcie.

Metody analizy sieciowej umożliwiają przeprowadzenie racjonalnej organizacji pracy i często skrócenie czasu realizacji przedsięwzięcia.

Spośród wielu istniejących metod analizy sieciowej organizacji i planowania złożonych przedsięwzięć, w których realizacji bierze udział wielu wykonawców wykonujących jednocześnie wiele czynności, szczególnie ważna wydaje się **PERT (Program Evaluation and Review Technique** – technika oceny i kontroli programu) oraz **CPM (Critical Path Method** – metoda ścieżki krytycznej).

PERT pozwala na wyznaczenie czynności krytycznych („wąskich gardeł”) determinujących czas wykonania całego przedsięwzięcia.

PERT została po raz pierwszy zastosowana w USA w 1953 r. podczas prac związanych z konstrukcją i budową rakiety Polaris.

Podstawowe pojęcia planowania sieciowego wg PERT

Zdarzenie – stan rozpoczęcia lub zakończenia działania elementarnego – nie pochłania czasu ani środków. Zdarzenia w sieci są ilustrowane za pomocą jej wierzchołków (węzłów) i oznaczane kolejnymi liczbami.

Czynność – działanie elementarne zachodzące w czasie, wymagające siły roboczej, energii, materiałów, miejsca, urządzeń i innych środków. Czynności są reprezentowane przez łuki (połączenia, odcinki) sieci i opisywane za pomocą pary liczb $[i,j]$ oznaczających zdarzenie rozpoczynające i kończące czynność.

Czas trwania czynności – czas realizacji działania elementarnego.

Przedsięwzięcie – złożony zespół zdarzeń i czynności zaczynających się i kończących w pewnym czasie.

Sieć PERT – graf, którego węzłami (wierzchołkami) są zdarzenia, a łukami (połączeniami) są czynności. Na łukach grafu opisana jest funkcja czasu.

Sieć – uporządkowana trójka elementów $S = [X, U, T]$, gdzie: $[X, U]$ - graf (uporządkowana dwójka elementów) przedstawiający organizację realizacji przedsięwzięcia, X - zbiór wierzchołków, U - zbiór łuków przekształcających zbiór X w X , T - funkcja czasu opisana na łukach.

Jeżeli para wierzchołków x_i i x_j jest ze sobą w relacji prostej $x_j = U(x_i)$ oraz odwrotnej $x_i = U^{-1}(x_j)$ to wierzchołki te tworzą **łuk skierowany** U_{ij} .

Łuki sąsiednie posiadają przynajmniej jeden wspólny wierzchołek.

Łańcuch – ciąg łuków, w których każde dwa kolejne są łukami sąsiednimi.

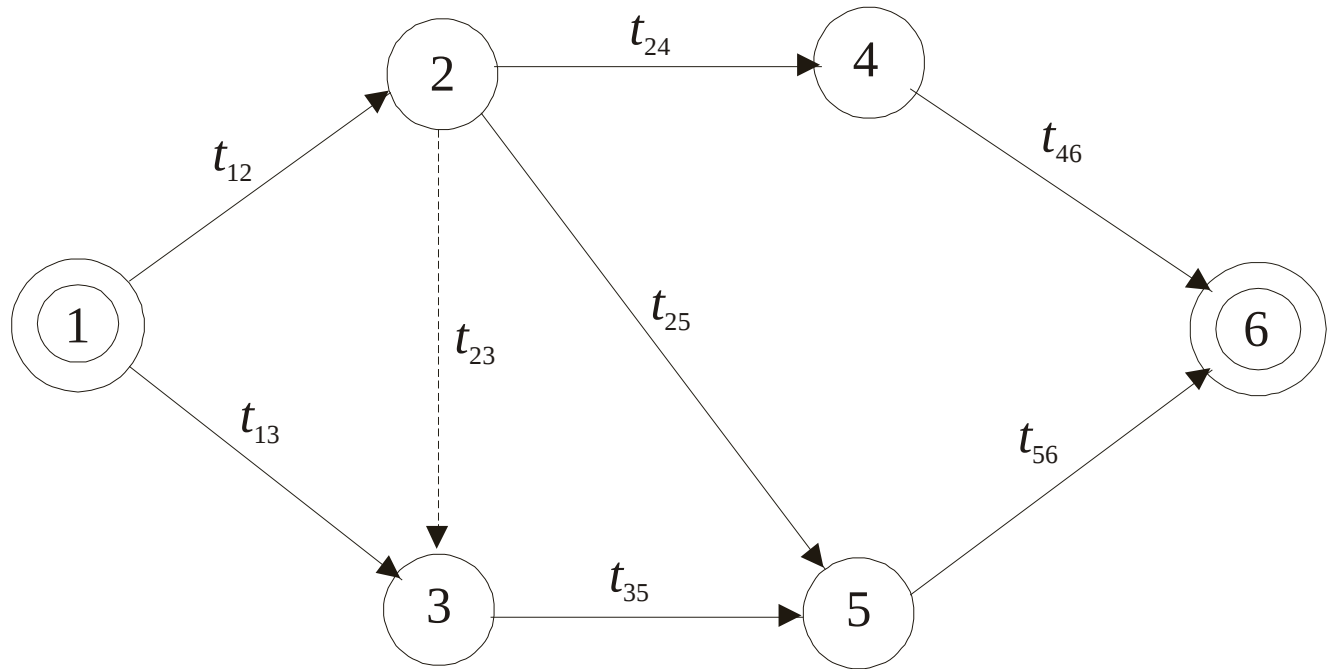
Droga w grafie – łańcuch, w którym dla każdego dwóch łuków koniec poprzedniego jest początkiem następnego.

Cykl grafu – droga w grafie, której początek pokrywa się z końcem.

Graf spójny – graf, którego każdą parę wierzchołków można połączyć łańcuchem.

Sieć – graf spójny, w którym na zbiorze łuków opisano pewną funkcję o wartościach nieujemnych (np. mającą sens czasu).

Sieć transportowa – sieć zbudowana na grafie bez cykli, w której istnieje tylko jedno wejście oraz tylko jedno wyjście.



Zdarzenia

- ze względu na miejsce w sieci:
 - **początkowe** – rozpoczynające realizację danego przedsięwzięcia, dla którego czas zaistnienia przyjmuje się równy zero (oznaczane zazwyczaj podwójnym okręgiem),
 - **końcowe** – kończące dane przedsięwzięcie, którego czas zaistnienia wyznacza czas realizacji przedsięwzięcia (oznaczane zazwyczaj podwójnym okręgiem),
 - **pośrednie** – wyróżnione stany realizacji przedsięwzięcia między zdarzeniem początkowym i końcowym;
- ze względu na kolejność występowania:
 - **poprzednie** – bezpośrednio poprzedzające dane, bez żadnych innych zdarzeń pośrednich,
 - **następne** – następujące po danym, bez żadnych innych zdarzeń pośrednich.

Czynności

- ze względu na miejsce w sieci: pierwsze, pośrednie i ostatnie,
- ze względu na czas trwania:
 - **rzeczywiste** (zwykłe) – realnie występujące w trakcie realizacji przedsięwzięcia, pochłaniające czas i środki (oznaczane zazwyczaj liniami ciągłymi),
 - **pozorne (zerowe)** – o zerowym czasie trwania, nie pochłaniające realnie ani czasu, ani środków, jednak mające znaczenie porządkujące w sieci: jeżeli rozpoczęcie czynności $[k,l]$ z pewnych względów technologicznych lub organizacyjnych powinno nastąpić po wystąpieniu zdarzenia o numerze j , to należy wprowadzić do sieci czynność pozorną $[j,k]$ (oznaczane zazwyczaj liniami kreskowymi).

W sieci czynności obowiązują następujące **zasady**:

- zdarzenia muszą następować po sobie w porządku technologicznym realizacji badanego przedsięwzięcia,
- żadnego zdarzenia nie można uważać za dokonane, dopóki nie zrealizowano wszystkich czynności prowadzących do niego,
- żadna czynność nie może być rozpoczęta, dopóki nie zaszło poprzedzające ją zdarzenie,
- każde zdarzenie następne musi mieć numer wyższy od zdarzenia poprzedniego,
- sieć, w której występują cykle jest zbudowana wadliwie.

W metodach analizy sieciowej czas jest najważniejszym parametrem charakteryzującym czynności – jego możliwie najdokładniejsze wyznaczenie jest jednym z głównych zadań podczas opracowywania sieci przedsięwzięcia. Metody określania czasu trwania czynności:

- **kalkulacyjna** (analityczna) – czas jest obliczany na podstawie znanych zależności matematycznych opisujących określone zjawiska fizyczne występujące w trakcie procesu technologicznego (np. czas przejazdu przez pojazd określonej drogi zależny jest od średniej prędkości jazdy i długości drogi do przejechania, czas zlewania paliwa z cysterny zależny jest np. od natężenia przepływu paliwa w elementach instalacji paliwowej, itp.),
- **statystyczna** – czas trwania czynności wyznaczany jest jako wartość średnia wielokrotnych pomiarów jej realizacji: $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$, t_i - wynik i -tego pomiaru czasu, n - ilość powtórzeń pomiaru czasu,
- **szacunkowa** – czas trwania czynności wyznaczany jest na podstawie ocen ekspertów w danej dziedzinie (może być jednoosobowa lub wieloosobowa). Ze względu na ilość danych podawanych przez ekspertów wyróżnia się metody jednoocenową i wieloocenową.

Wartość czasu trwania czynności t_{ij} jest średnią ważoną: $t_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n w_k t_k}{\sum_{k=1}^n w_k}$, w_k - przyjęte wartości

współczynników wagowych dla podawanych przez ekspertów czasów t_k .

W metodzie trójocenowej występują:

- t_a - czas optymistyczny – realnie najkrótszy czas trwania czynności w warunkach sprzyjających, bez żadnych istotnych zakłóceń,
- t_m - czas najbardziej prawdopodobny realizacji czynności, niezbędny do jej wykonania w warunkach normalnych, występujących najczęściej,
- t_b - czas pesymistyczny – najdłuższy czas wykonywania czynności w warunkach niekorzystnych, dających się realnie przewidzieć.

$$t_{ij} = \frac{w_a t_a + w_m t_m + w_b t_b}{w_a + w_m + w_b}$$

Dla najczęściej przyjmowanych wartości współczynników wagowych: $w_a = 1$, $w_m = 4$ i $w_b = 1$:

$$t_{ij} = \frac{t_a + 4t_m + t_b}{6}.$$

Czas trwania czynności jest zmienną losową. Im większa jest różnica między oszacowanymi wartościami czasów t_b i t_a tym mniejsze jest prawdopodobieństwo zrealizowania czynności, a za tym i całego przedsięwzięcia, w założonym czasie.

Dla określonej sieci jej analiza techniką PERT polega na kolejnym wyznaczeniu:

1) najwcześniejszych możliwych chwil zaistnienia każdego j -tego zdarzenia

$$t_j^0 = \max_{x_i \in U^{-1}x_j} \{t_i^0 + t_{ij}\}$$

t_i^0 - najwcześniejsze możliwe chwile zaistnienia zdarzeń bezpośrednio poprzednich

t_{ij} - czasy trwania czynności pomiędzy zdarzeniami x_i i x_j

czasy te wyznacza się rozpoczynając od zdarzenia początkowego w sieci, przy czym dla zdarzenia początkowego należy przyjąć $t_i^0 = 0$,

2) najpóźniejszych możliwych chwil zaistnienia każdego i -tego zdarzenia: $t_i^1 = \min_{x_j \in Ux_i} \{t_j^1 - t_{ij}\}$

t_j^1 - najpóźniejsze możliwe chwile zaistnienia zdarzeń bezpośrednio następnych

t_{ij} - czasy trwania czynności pomiędzy zdarzeniami x_i i x_j

czasy te wyznacza się rozpoczynając od zdarzenia końcowego w sieci, przy czym zdarzenia końcowego należy przyjąć $t_i^1 = t_i^0$,

3) całkowitych zapasów czasu trwania czynności $[i,j]$: $z_{i,j} = t_j^1 - t_i^0 - t_{i,j}$

t_i^0 - najwcześniejsze możliwe chwile zaistnienia zdarzeń rozpoczynających te czynności

t_j^1 - najpóźniejsze możliwe chwile zaistnienia zdarzeń kończących te czynności

t_{ij} - czasy trwania tych czynności.

Zapas czasu trwania czynności – rezerwa czasu, której wyczerpanie (opóźnienie terminu rozpoczęcia jej realizacji lub wolniejsze jej wykonywanie) nie spowoduje zwiększenia najpóźniejszego możliwego terminu zaistnienia zdarzenia kończącego ją, a w konsekwencji i czasu zakończenia całego przedsięwzięcia.

Niezerowy zapas czasu trwania czynności dotyczy całych dróg znajdujących się pomiędzy zdarzeniami, od których rozpoczyna się i na których kończy się kilka czynności. Gdyby czas trwania jednej z tych czynności zwiększyć o wyznaczony dla tej drogi niezerowy zapas czasu (wykorzystać zapas czasu), to następuje zanik zapasu czasu dla wszystkich pozostałych czynności na tej drodze – zapas czasu może być wykorzystany w danym fragmencie sieci tylko raz.

Zdarzenia krytyczne – zdarzenia, dla których najwcześniejsza i najpóźniejsza możliwa chwila ich zaistnienia są sobie równe: $t_i^0 = t_i^1$.

Czynności krytyczne – czynności o zerowym zapasie czasu trwania $z_{ij} = 0$.

Ścieżka krytyczna – ciąg kolejnych zdarzeń i czynności krytycznych, które łączą zdarzenie początkowe ze zdarzeniem końcowym przedsięwzięcia; w każdej sieci istnieje co najmniej jedna ścieżka krytyczna.

W **idealnej sieci czynności** wszystkie ścieżki są ścieżkami krytycznymi (na żadnej ze ścieżek nie ma zapasu czasu, a więc planowanego przestoju związanego z oczekiwaniem na zakończenie realizacji czynności składających się na ścieżkę krytyczną).

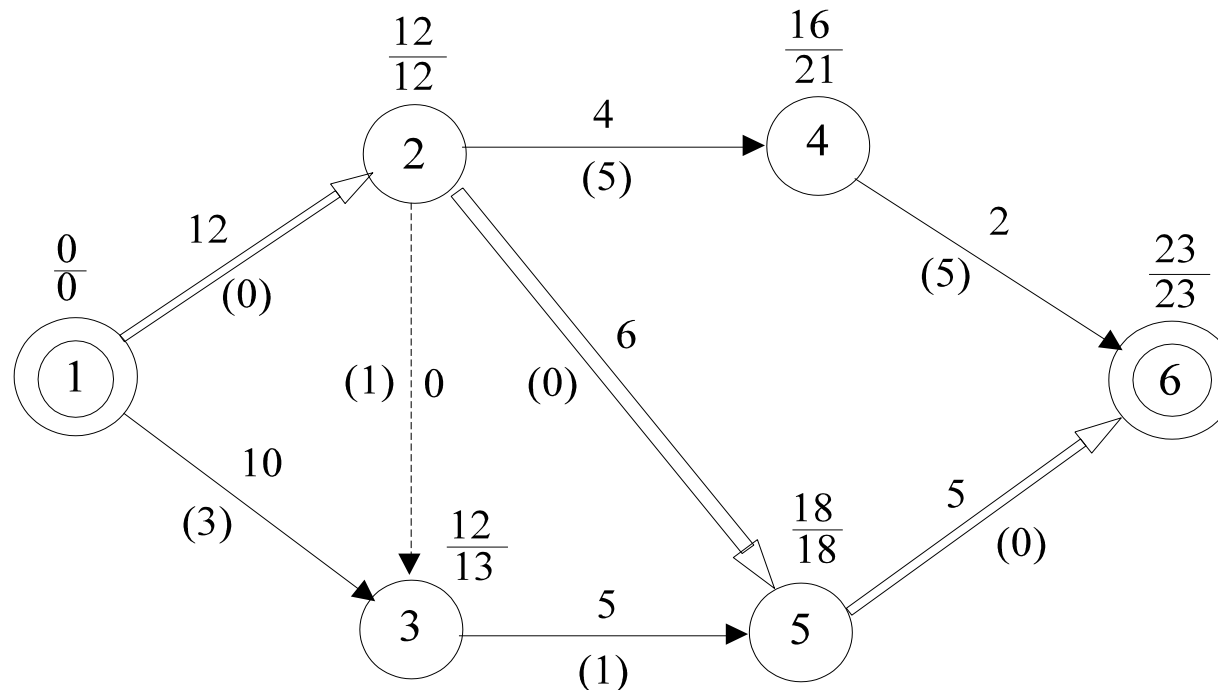
Ścieżka krytyczna ustala najwcześniejszy termin, w jakim można oczekiwać zakończenia całego przedsięwzięcia – ***jakiegokolwiek nieplanowane opóźnienie realizacji czynności na ścieżce krytycznej powoduje opóźnienie realizacji całego przedsięwzięcia.***

Dla realizacji czynności na ścieżce krytycznej należy wyznaczać pracowników i urządzenia o największym współczynniku bezpieczeństwa (pracowników najbardziej doświadczonych, najsilniejszych, urządzenia nowe, wysoko niezawodne).

Możliwość wyznaczenia ścieżki (drogi) krytycznej stanowi zasadniczą zaletę i istotę metod analizy sieciowej.

Sieć z wyznaczonymi ścieżkami krytycznymi i ścieżkami z zapasami czasu stanowi materiał do analizy i doskonalenia planowanego przedsięwzięcia, polegającego na skróceniu realizacji całego przedsięwzięcia poprzez, o ile jest to technologicznie możliwe, przesunięciu czynności ze ścieżki krytycznej na ścieżkę z niezerowym zapasem czasu trwania czynności.

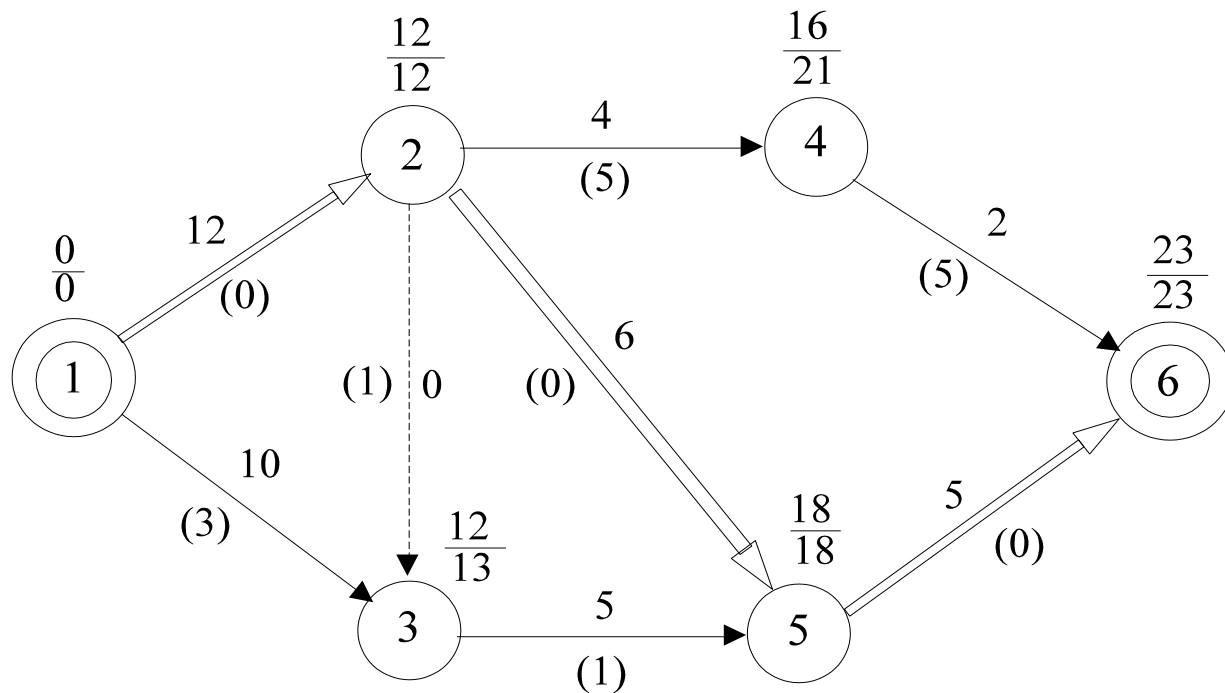
Przykład. Niech będzie określona sieć transportowa przedstawiona poniżej.
Dla każdej z czynności znany jest czas jej realizacji wpisany nad łukiem ją symbolizującym.



Najwcześniejsze możliwe chwile zaistnienia kolejnych zdarzeń w licznikach ułamków przy zdarzeniach.

Najpóźniejsze możliwe chwile zaistnienia kolejnych zdarzeń w mianownikach ułamków przy zdarzeniach.

Zapasy czasu trwania czynności kolejnych czynności w nawiasach pod łukami czynności.



Czynności [2,4] i [4,6] mają zapasy czasu równe 5 - gdyby czas trwania jednej z tych czynności zwiększyć o 5, to następuje zanik zapasu czasu dla drugiej czynności - zapas czasu może być wykorzystany w danym fragmencie sieci tylko raz.

Zdarzenia krytyczne: x_1, x_2, x_5, x_6 .

Czynności krytyczne: [1,2], [2,5], [5,6].

Ścieżkę krytyczną oznaczono linią podwójną.

Czas trwania całego przedsięwzięcia to 23 jednostki czasu.

Sieć nie jest idealna.

Harmonogramy czynności

Na podstawie sieci czynności można opracować tzw. operatywny plan kierowania w postaci *harmonogramu* lub *harmonogramu Gantt-Adamieckiego*.

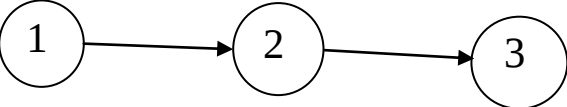
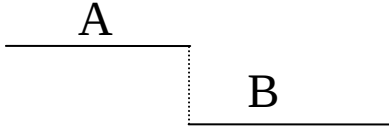
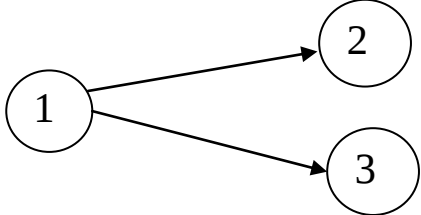
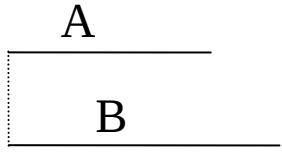
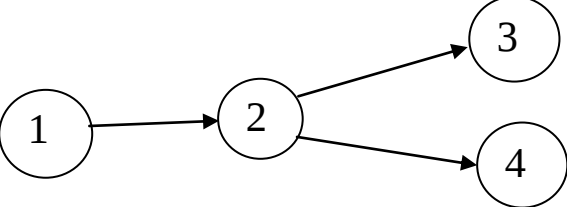
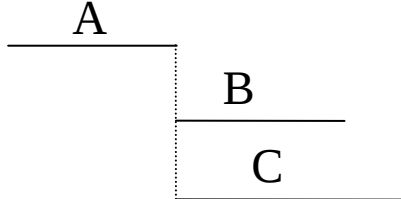
Harmonogram - forma planowania przedsięwzięć realizowanych zazwyczaj przez jednego wykonawcę - tabelaryczne zestawienie wykonywanych czynności oraz terminów ich realizacji – daje informację o pracy wykonywanej w danej chwili, ale nie uwidacznia powiązań między czynnościami.

Harmonogram realizacji przedsięwzięcia

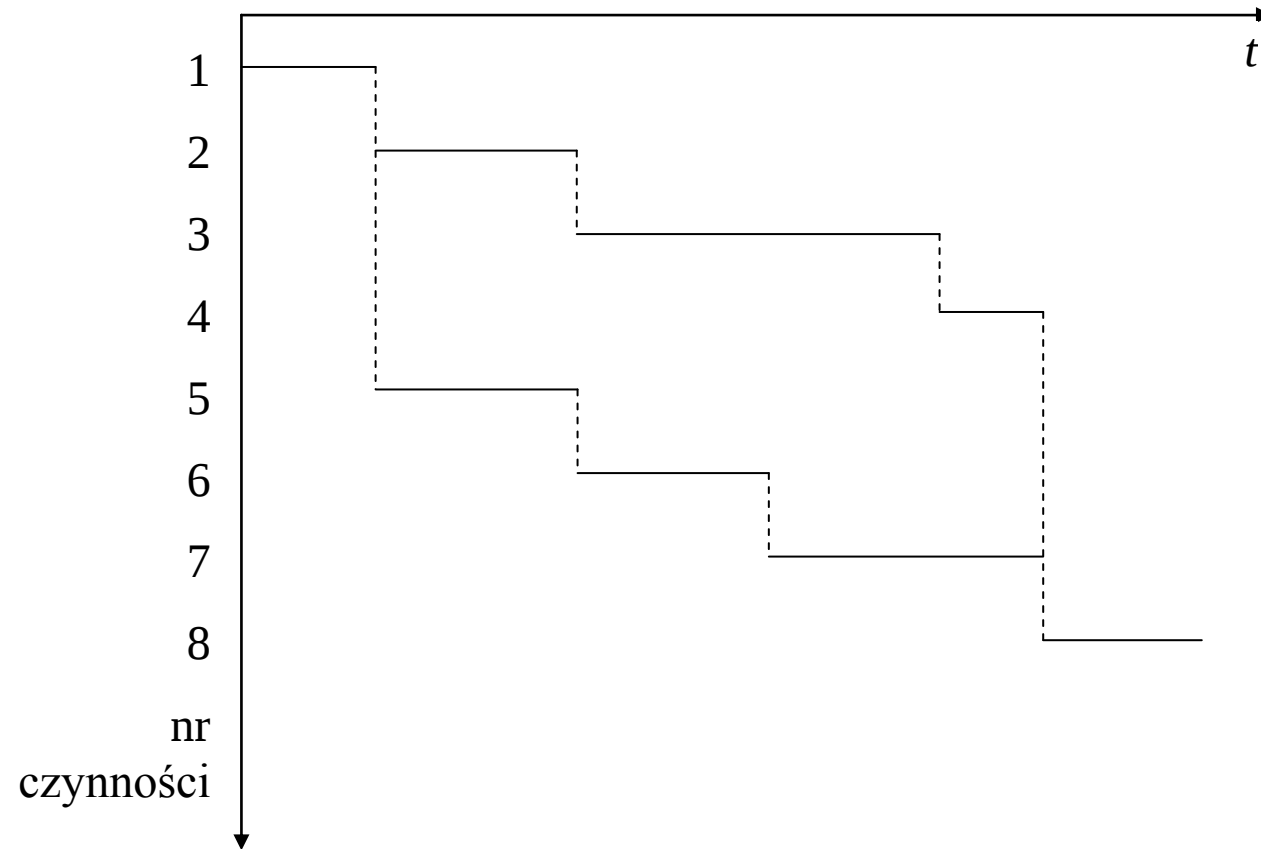
Lp.	Nazwa czynności	Termin realizacji	Uwagi

Harmonogram Gantta-Adamieckiego – wykres przedstawiający przedział czasu realizacji poszczególnych czynności składowych przedsięwzięcia.

Odpowiedniość elementów sieci i harmonogramu Gantta-Adamieckiego:

czynność A o numerze [1,2]		
czynność B o numerze [2,3] zaczyna się po skończeniu czynności A o numerze [1,2]		
czynności A o numerze [1,2] i B o numerze [1,3] o różnych czasach trwania zaczynają się w tej samej chwili		
czynności B o numerze [2,3] i C o numerze [2,4] o różnych czasach trwania zaczynają się po zakończeniu czynności A o numerze [1,2]		

Harmonogram Gantta-Adamieckiego



Opracowanie przedsięwzięcia z wykorzystaniem PERT

Proces opracowania przedsięwzięcia za pomocą PERT polega na wykreśleniu sieci czynności ilustrującej przebieg realizacji przedsięwzięcia, wykonaniu obliczeń w sieci oraz przeprowadzeniu optymalizacji przedsięwzięcia w celu zmniejszenia całkowitego czasu jej trwania.

W procesie opracowania planu realizacji przedsięwzięcia można wyróżnić trzy etapy:

- etap I (wstępny) – podział przedsięwzięcia na czynności i zdarzenia,
- etap II – opracowanie sieci czynności,
- etap III – analiza i doskonalenie sieci czynności.

Podział przedsięwzięcia na czynności i zdarzenia

- opracowanie założeń wykonawczych przedsięwzięcia obejmujących między innymi: określenie metody realizacji, miejsca, terminów, sił i środków biorących udział w realizacji zadania,
- dokonanie technologicznego podziału przedsięwzięcia na etapy i czynności. Ustalany jest stopień szczegółowości sieci czynności, zależny od szczebla zarządzania – czynność składowa występująca na danym szczeblu, może być traktowana jako odrębne przedsięwzięcie na niższym szczeblu zarządzania opracowywane w sposób analogiczny,
- sporządzenie wykazu czynności oraz ustalenie warunków organizacyjnych i technologicznych ich wykonania,
- przydział zadań poszczególnym wykonawcom,
- określenie czasu trwania czynności.

Opracowanie sieci czynności

- ustalenie kolejności i numeracja zdarzeń i czynności,
- wykreślenie sieci czynności,
- opis czynności zawartych w sieci (ich czasów trwania i wykonawców),
- wykonanie obliczeń w sieci,
- wyznaczenie ścieżki krytycznej w sieci.

Analiza i doskonalenie sieci czynności

- analiza sieci czynności,
- przydział dodatkowych sił i środków do realizacji niektórych czynności znajdujących się na ścieżce krytycznej, co jest związane ze wzrostem kosztów realizacji przedsięwzięcia i powinno podlegać analizie ekonomicznej,
- zmiany sposobu realizacji przedsięwzięcia poprzez przesunięcia niektórych czynności ze ścieżki krytycznej na inną ścieżkę, o ile jest to ze względów technologicznych i organizacyjnych dopuszczalne,
- zatwierdzenie sieci czynności,
- sporządzenie wykazu rezerwowych sił i środków (na ścieżkach z zapasami czasu trwania czynności), które mogą być wykorzystane dla realizacji innych, wcześniej nie przewidywanych zadań.

Teoria obsługi masowej (teoria kolejek) bada procesy losowej obsługi losowych strumieni zgłoszeń - bada systemy obsługi, w których w losowych chwilach czasu pojawiają się zgłoszenia wymagające na ogół losowego czasu obsługi.

Systemy takie nazywa się **systemami obsługi masowej (SOM)**. Rodzaj zgłoszeń i obsług zależy od danego badanego systemu, np.:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| klient do sprzedawcy | - czas operacji kupna/sprzedaży, |
| pacjent do lekarza | - czas badania, |
| telefonujący do sieci | - czas połączenia, |
| urządzenie do stanowiska obsługi | - czas obsługi. |

Podstawowe zadanie teorii obsługi masowej - opracowanie matematycznych metod oceny jakości działania SOM poprzez wyznaczenie określonych charakterystyk i wskaźników procesów obsługi masowej, a w szczególności:

- wielkości charakteryzujących system w całości, np. prawdopodobieństwa odmowy obsługiwanego się zgłoszenia, prawdopodobieństwa wystąpienia kolejki do obsługiwanego,
- rozkładów dyskretnych lub ciągłych zmiennych losowych charakteryzujących system, np. rozkładu liczby zgłoszeń do obsługiwanego, rozkładu liczby zgłoszeń oczekujących na obsługiwane, rozkładu czasu obsługiwanego, rozkładu czasu oczekiwania na obsługiwane,
- wartości oczekiwanych parametrów charakteryzujących system, np. liczby zgłoszeń znajdujących się w systemie, czasu realizacji obsługi (czasu obsługiwanego) zgłoszenia.

W teorii obsługi masowej operuje się następującymi pojęciami:

strumień – ciąg zdarzeń,

zgłoszenie – każdy obiekt przychodzący do systemu obsługiwanego w celu obsłużenia,

strumień zgłoszeń – strumień składający się ze zgłoszeń do obsługiwanego,

strumień wejściowy – strumień zgłoszeń wymagający obsługiwanego i nadchodzący do systemu obsługiwanego,

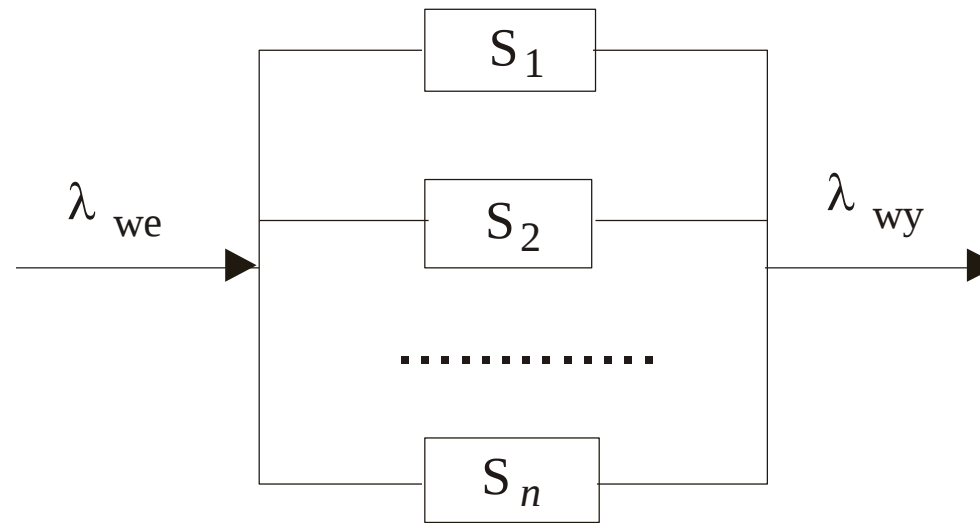
strumień wyjściowy – strumień zgłoszeń opuszczający system obsługiwanego,

kanał obsługi – siły i środki wykonujące obsługiwane pojedynczego zgłoszenia,

czas trwania obsługiwanego – przedział czasu niezbędny dla spełnienia przez system obsługiwanego wszystkich wymagań pochodzących od jednego zgłoszenia,

zdolność przepustowa systemu obsługiwanego – maksymalna liczba zgłoszeń, które mogą być jednocześnie obsługiwane przez system obsługiwanego,

czas pobytu zgłoszenia w systemie obsługiwanego – przedział czasu od chwili pojawienia się zgłoszenia w systemie obsługiwanego do chwili opuszczenia systemu przez zgłoszenie; zwykle składa się z czasu oczekiwania na obsługiwane, czasu obsługiwanego i czasu oczekiwania po obsługiwaniu na użytkowanie.



- strumień wejściowy o intensywności λ_{we} – strumień zgłoszeń do SOM jako ciąg zdarzeń składający się ze zgłoszeń do obsługiwaniania,
- $S_1, S_2, \dots, S_n$ – kanały (stanowiska, aparaty) obsługi; parametrem charakteryzującym system obsługiwaniania jest ich liczba n oraz czas obsługiwaniania,
- strumień wyjściowy o intensywności λ_{wy} – strumień zgłoszeń opuszczających SOM.

Zgłoszenia nadchodzące do systemu obsługiwaniania są obsługiwane przez jego kanały obsługi. W przypadku gdy wszystkie kanały są zajęte, nadchodzące zgłoszenia tworzą kolejkę zgłoszeń oczekujących na obsługiwanie lub opuszczają system nie obsłużone.

Ze względu na charakter strumienia wejściowego do SOM wyróżnia się:

- **SOM z nieograniczonym strumieniem zgłoszeń** – liczba potencjalnych zgłoszeń do obsługiowania nie jest z góry ograniczona lub znana, np. do publicznej stacji benzynowej może zgłosić się dowolny pojazd,
- **SOM z ograniczonym strumieniem zgłoszeń** – liczba możliwych zgłoszeń do obsługiowania jest ograniczona z góry, np.: wewnętrzne działy usługowo-naprawcze przedsiębiorstw obsługują tylko urządzenia składające się na majątek tego przedsiębiorstwa.

Ze względu na charakter strumienia wyjściowego w stosunku do strumienia wejściowego gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte (na „los” jaki spotyka zgłoszenie do obsługiwanego gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte), wyróżnia się:

- **SOM ze stratami** – strumień wyjściowy składa się ze zgłoszeń obsłużonych i nieobsłużonych; jako „stratę” rozumie się nieobsłużenie danego zgłoszenia; wyróżnia się:
 - **SOM z kolejką zabronioną** – gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte zgłoszenie opuszcza system nie obsłużone (nie może tworzyć się kolejka zgłoszeń oczekujących na obsługiwanie), np. automatyczna centrala telefoniczna, gdy numer abonenta jest zajęty,
 - **SOM z ograniczoną kolejką** – zgłoszenie opuszcza system nie obsłużone gdy zajęte są wszystkie kanały obsługi i wszystkie miejsca w kolejce do obsługiwanego (nie może tworzyć się kolejka zgłoszeń oczekujących na obsługiwanie dłuższa niż określona liczba miejsc w kolejce), np. gdy ograniczony plac postojowy przed stacją benzynową jest całkowicie wypełniony pojazdami,
- **SOM bez strat (z nieograniczoną kolejką)** – strumień wyjściowy składa się wyłącznie ze zgłoszeń obsłużonych.

Regulaminy kolejek:

- **FIFO** (first in first out) – zgłoszenia są obsługiwane w kolejności ich przybycia do SOM, np. kolejka klientów w sklepie,
- **LIFO** (last in first out) – w pierwszej kolejności obsługiwane jest ostatnie zgłoszenie, np. wydawanie środków materiałowych z magazynu, w którym są one układane jedne na drugich,
- **SIRO** (selection in random order) – kolejność obsługi losowa, np. możliwość uzyskania połączenia z zajęтым (w danej chwili) numerem abonenta centrali automatycznej przez jednego z kilku abonentów wykręcających ten sam numer jednocześnie,

- **z priorytetem zgłoszeń** – w pierwszej kolejności obsługiwane są zgłoszenia o najwyższym priorytecie, np. dostęp do kas w pierwszej kolejności kobiet w ciąży; wyróżnia się:
 - **priorytet bezwzględny (rugujący)** – w chwili przybycia zgłoszenia z priorytetem do SOM w sytuacji zajętości wszystkich kanałów obsługi przerywa się obsługiwanie zgłoszenia o mniejszym priorytecie i obsługuje to o większym priorytecie; wyróżnia się:
 - **ze stratą zgłoszenia**, którego obsługiwanie przerwano,
 - **z kontynuacją obsługi zgłoszenia**, którego obsługiwanie przerwano po zakończeniu obsługi zgłoszenia z większym priorytetem,
 - **z rozpoczęciem od nowa obsługi zgłoszenia**, którego obsługiwanie przerwano po zakończeniu obsługi zgłoszenia z większym priorytetem,
 - **priorytet względny** – w chwili przybycia zgłoszenia z priorytetem do SOM w sytuacji zajętości wszystkich kanałów obsługi zajmuje ono pierwsze miejsce w kolejce zgłoszeń oczekujących na obsługiwanie,
 - **mieszane i dynamiczne reguły priorytetowe** – w chwili przybycia zgłoszenia z priorytetem do SOM w sytuacji zajętości wszystkich kanałów obsługi jest ono obsługiwane natychmiast lub zajmuje odpowiednie miejsce w kolejce zgłoszeń oczekujących na obsługiwanie w zależności od zaawansowania trwających usług, priorytetów obsługiwanych zgłoszeń, priorytetów zgłoszeń oczekujących w kolejce i innych ustaleń kierownictwa SOM.

Ze względu na istnienie priorytetu kanałów obsługi wyróżnia się systemy:

- **nieuporządkowane** – kanały obsługi są równouprawnione – nadchodzące zgłoszenie jest obsługiwane przez dowolny, wolny kanał obsługi, bez nadawania pierwszeństwa żadnemu z nich,
- **uporządkowane** – kanały obsługi nie są równouprawnione – nadchodzące zgłoszenie jest obsługiwane przez pierwszy z wolnych kanałów, uporządkowanych według określonego kryterium.

Początek teorii obsługi masowej – 1918 r. – A. K. Erlang – matematyk, pracownik sieci telefonicznej.

Twórca nauki o masowej obsłudze – 1951 r. – D. G. Kendall – praca o systemach kolejek.

Opis Kendalla SOM: trzy symbole przedzielone pochyłymi kreskami, oznaczające:

- rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej τ_1 czasu między kolejnymi zgłoszeniami,
- rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej τ_2 czasu obsługiwanego,
- liczba kanałów obsługi znajdujących się w systemie.

Zapis Kendalla bywa uzupełniany o kolejne dwa parametry SMO, umieszczone po dwukropku w nawiasie i przedzielone przecinkiem:

- wielkość obsługiwanego populacji m ,
- liczba miejsc w kolejce L .

Symbole dla wyróżnionych rozkładów:

D - rozkład deterministyczny o równych odstępach czasu,

M - rozkład wykładniczy, o gęstości $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{dla } t \geq 0, \lambda > 0 \end{cases}$,

E_k - rozkład Erlanga rzędu k , o gęstości $f_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{\lambda}{(k-1)!} (\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t} & \text{dla } t \geq 0, \lambda > 0, k = 1, 2, \dots \end{cases}$,

G - dowolny rozkład,

GI - dowolne odstępy czasu między kolejnymi zgłoszeniami lub czasy kolejnych obsłużowań, niezależne od siebie.

Symbol $M/M/5:(\infty, \infty)$ oznacza SOM, w którym czas między kolejnymi zgłoszeniami i czas obsłużowania mają rozkłady wykładnicze o odpowiednich intensywnościach, liczba kanałów obsługi jest równa 5, system obsługuje populację o nieskończonej liczności (system z nieograniczonym strumieniem zgłoszeń) i istnieje nieskończona liczba miejsc w kolejce (system bez strat).

Strumień zgłoszeń do obsługi

Strumień zgłoszeń do obsługi charakteryzuje liczba zgłoszeń k nadchodzących do systemu obsługi w danym przedziale czasu.

k zależy od wielu nieokreślonych ściśle czynników i należy ją traktować jako zmienną losową dyskretną $X(t)$ – jest funkcją czasu i przyjmuje tylko wartości całkowite nieujemne.

Przyjmuje się, że strumień zgłoszeń do obsługi jest znany, jeżeli znane jest prawdopodobieństwo nadejścia do systemu k zgłoszeń w przedziale czasu $[0, t)$ – znana jest dystrybuanta $P(X(t) = k) = P_k$, wtedy: $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_i \leq \dots \leq k_t$ dla $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_i \leq \dots \leq t$, k_i liczba zgłoszeń w przedziale czasu $[0, t_i)$.

Wartość oczekiwana liczby zgłoszeń: $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k$.

Znalezienie postaci tej dystrybuanty jest dość trudne i dla uproszczenia zakłada się: **strumień zgłoszeń do obsługi jest strumieniem prostym** – zmienna losowa τ_1 (czas między kolejnymi zgłoszeniami) ma rozkład wykładniczy z parametrem μ_1 o dystrybuancie $F(t) = P(\tau_1 < t) = 1 - e^{-\mu_1 t}$, μ_1 - odwrotność wartości oczekiwanej zmiennej losowej τ_1 .

Prosty strumień zgłoszeń do obsługi jest stacjonarny (jednorodny), pojedynczy (zwykły) i bez następstw.

Stacjonarność – prawdopodobieństwo nadejścia do SOM k zgłoszeń w przedziale czasu o długości t zależy tylko od liczby zgłoszeń k i długości przedziału czasu t , a nie zależy od położenia tego przedziału na osi czasu (tj. od wyboru chwili początkowej T):

$$P(X(t) = k) = P(X(T + t) - X(T) = k).$$

Pojedynczość – w danej chwili do systemu może nadejść tylko jedno zgłoszenie:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(X(t) > 1)}{t} = 0.$$

Brak następstw – prawdopodobieństwo nadejścia k zgłoszeń w przedziale czasu $[T, T+t)$ jest niezależne od ilości i sposobu występowania zgłoszeń do chwili T - prawdopodobieństwo warunkowe wystąpienia k zgłoszeń w danym przedziale czasu o długości t pod dowolnym warunkiem jest równe prawdopodobieństwu bezwarunkowemu:

$$P((X(T + t) - X(T) = k) \mid (X(T) = l)) = P(X(T + t) - X(T) = k).$$

Dla strumienia prostego:

- liczba zgłoszeń k do SOM ma rozkład Poissona z parametrem $c > 0$: $P_k = \frac{c^k}{k!} e^{-c}$,
- $E(X) = c$.

Rozpatrując ciąg zdarzeń zachodzących w czasie przy dowolnym podziale osi czasu na przedziały spełniające warunki:

- prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia w przedziale o długości dążącej do zera też dąży do zera,
- liczby zdarzeń w rozłącznych przedziałach czasu są zmiennymi losowymi niezależnymi, to liczba zdarzeń w przedziale czasu o długości t jest zmienną losową dyskretną o rozkładzie Poissona z parametrem $c = \lambda t$, λ - **intensywność zdarzeń** (przeciętna (średnia) liczba zgłoszeń nadchodzących w jednostce czasu): $P_k = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ (rozkład ciągły dla t i dyskretny dla k) oraz $E(X(t)) = \lambda t$.

Intensywność strumienia zgłoszeń do obsługiwanego $\lambda = \frac{E(X(t))}{t}$ - cecha charakteryzująca SOM

$\lambda = \frac{E(X(t))}{t} \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{t}{E(X(t))} = E(\tau_1(t)) = \frac{1}{\mu_1}$ (czas dzielony przez oczekiwaną liczbę zgłoszeń nadchodzących w tym czasie = oczekiwany czas pomiędzy zgłoszeniami) $\rightarrow \lambda \equiv \mu_1$.

Czas obsługiwanie zgłoszeń

Czas trwania obsługiwanie pojedynczego zgłoszenia – determinuje zdolność przepustową kanału i całego systemu obsługiwanie.

Czas obsługiwanie $\tau_2(t)$ jest zmienną losową ciągłą (przyjmuje dowolne wartości nieujemne) zależną od wielu nieokreślonych ściśle czynników.

Dla uproszczenia – proces obsługiwanie to proces prosty (stacjonarny, pojedynczy i bez następstw), dla którego zmienna losowa τ_2 (czas trwania obsługiwanie) ma rozkład wykładniczy z parametrem μ_2 o dystrybuancie $F(t) = P(\tau_2 < t) = 1 - e^{-\mu_2 t}$, $t \geq 0$,

$\mu_2 = \frac{1}{E(\tau_2(t))} \equiv \mu$ - odwrotność wartości oczekiwanej zmiennej losowej τ_2 - **intensywność obsługiwanie**.

Parametry i charakterystyki systemów obsługi masowej

Najbardziej istotne informacje o SOM uzyskuje się na podstawie wartości parametrów:

- λ - intensywność strumienia zgłoszeń do systemu obsługiwanego lub jej odwrotność $\frac{1}{\lambda} = E(\tau_1(t))$ - średni czas między zgłoszeniami,
- μ - intensywność obsługiwanego lub jej odwrotność $\frac{1}{\mu} = E(\tau_2(t))$ - średni czas obsługiwanego,
- n - liczba kanałów obsługi.

Wielkość $\frac{\lambda}{n\mu}$ nazywa się **współczynnikiem wykorzystania (obciążenia) kanałów obsługi**.

Oznaczenie $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ daje $\frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\rho}{n}$.

Nadwyżka całkowitej wydajności SOM nad intensywnością zgłoszeń do obsługi:

$$n\mu - \lambda = \mu \left(n - \frac{\lambda}{\mu} \right) = \mu(n - \rho).$$

Zgodnie z klasyfikacją Kendalla, warunki działania SOM determinuje także liczebność obsługiwanej populacji m oraz dopuszczalna liczba miejsc w kolejce L .

Liczba stanów, w których może znajdować się SOM, zależy od tych pięciu parametrów.

Dany stan SOM jest determinowany przez liczbę zgłoszeń znajdujących się w systemie.

Przejście systemu do stanu wyższego jest dokonywane dzięki nadchodzeniu zgłoszeń z intensywnością λ , przejście do stanu niższego wskutek wykonania obsługi z intensywnością zależną od liczby kanałów wykonujących obsługę: $\mu, 2\mu, \dots, n\mu$.

Suma prawdopodobieństw znajdowania się systemu we wszystkich możliwych stanach jest równa 1.

Możliwe jest określenie prawdopodobieństwa znajdowania się systemu w dowolnym stanie i innych charakterystyk pochodnych.

Przedstawione zostaną wyrażenia określające najczęściej wyznaczone charakterystyki poszczególnych typów SOM dla okresu stacjonarnego (dostatecznie długiego) ich funkcjonowania.

System bez strat z ograniczonym strumieniem zgłoszeń

Czas między kolejnymi zgłoszeniami i czas obsługiwaną mają rozkłady wykładnicze odpowiednio o intensywności zgłoszeń λ i intensywności obsługiwaną μ .

System ma n kanałów obsługi.

Liczebność obsługiwaną populacji zgłoszeń jest skończona i wynosi m .

System jest systemem bez strat - liczba miejsc w kolejce jest skończona i wynosi $m - n$.

Jeżeli zgłoszenie do obsługiwaną przybywa do systemu w chwili, gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte, zajmuje miejsce w kolejce i oczekuje na obsługiwane.

Obowiązuje regulamin kolejki typu FIFO.

Zgodnie z symboliką Kendalla ten SOM ma oznaczenie: $M/M/n:(m,m-n)$.

1. prawdopodobieństwo tego, że wszystkie kanały obsługi są wolne (w systemie nie ma

$$\text{obsługiwanych zgłoszeń): } P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{m! \rho^k}{(m-k)! k!} + \sum_{k=n+1}^m \frac{m! \rho^k}{(m-k)! n! n^{k-n}}},$$

2. prawdopodobieństwo tego, że w systemie znajduje się k zgłoszeń i jest ich:

- mniej niż kanałów obsługi: $1 \leq k \leq n$ (zajętych jest k kanałów obsługi ale są jeszcze wolne kanały i nie tworzy się kolejka),
- tyle samo ile kanałów obsługi: $k = n$ (zajęte są wszystkie kanały obsługi ale jeszcze nie tworzy się kolejka),
- więcej niż kanałów obsługi: $n < k \leq m$ (zajęte są wszystkie kanały obsługi i tworzy się kolejka zgłoszeń oczekujących na obsługiwanie):

$$P_k = P_0 \begin{cases} \frac{m! \rho^k}{(m-k)! k!} & \text{dla } 1 \leq k \leq n \\ \frac{m! \rho^k}{(m-k)! n! n^{k-n}} & \text{dla } n \leq k \leq m \end{cases} \quad (\text{dla } k = n \text{ obie zależności dają się takie same wyniki}),$$

3. prawdopodobieństwo tego, że liczba zgłoszeń oczekujących na obsługiwanie (długość kolejki L) jest większa od pewnej liczby N ($n \leq N \leq m - n$): $P_{L>N} = \sum_{k=N+1}^m P_k = 1 - \sum_{k=0}^N P_k$,

4. średnia liczba zgłoszeń oczekujących na obsługiwanie (średnia długość kolejki):

$$E_1 = \sum_{k=n+1}^m (k-n)P_{k>n} = P_0 \frac{m!}{n!} \sum_{k=n+1}^m \frac{(k-n)\rho^k}{(m-k)!n^{k-n}},$$

5. średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w systemie obsługiwanym (obsługiwanych i w kolejce razem):

$$E_2 = \sum_{k=1}^m kP_k = \sum_{k=1}^n kP_{k \leq n} + \sum_{k=n+1}^m kP_{k>n} = P_0 \left(m! \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{(m-k)!(k-1)!} + \frac{m!}{n!} \sum_{k=n+1}^m \frac{k\rho^k}{(m-k)!n^{k-n}} \right),$$

6. średnia liczba wolnych kanałów obsługi: $E_3 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_{k \leq n} = P_0 m! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)\rho^k}{(m-k)!k!}$,

7. współczynnik postoju zgłoszenia w kolejce (stosunek średniej liczby zgłoszeń oczekujących na obsługiwanie do ogólnej liczby możliwych zgłoszeń): $\eta = \frac{E_1}{m}$,
8. współczynnik przestoju kanałów obsługi (stosunek średniej liczby wolnych stanowisk obsługi do ich ogólnej liczby w systemie): $\chi = \frac{E_3}{n}$.

Dla dostatecznie dużych wartości m charakterystyki tej grupy SOM można obliczać według wzorów dla systemów z nieograniczonym strumieniem zgłoszeń. Czyni to obliczenia znacznie mniej pracochłonnymi (w praktyce wystarczająca jest wartość m wyższa od 10).

System bez strat z nieograniczonym strumieniem zgłoszeń

Czas między kolejnymi zgłoszeniami i czas obsługiowania mają rozkłady wykładnicze odpowiednio o intensywności zgłoszeń λ i intensywności obsługiowania μ .

System ma n kanałów obsługi.

Liczebność obsługiwanej populacji zgłoszeń jest nieskończona.

System jest systemem bez strat - liczba miejsc w kolejce jest nieskończona.

Jeżeli zgłoszenie do obsługiowania przybywa do systemu w chwili gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte, zajmuje miejsce w kolejce i oczekuje na obsługę.

Obowiązuje regulamin kolejki typu FIFO.

Aby długość kolejki (też czas oczekiwania na obsługiwanie) nie wzrastała do nieskończoności, powinien być spełniony warunek $\frac{\lambda}{n\mu} < 1$ (intensywność zgłoszeń do obsługiowania λ powinna być mniejsza od całkowitej intensywności (wydajności) obsługiowania zgłoszeń w systemie $n\mu$).

Zgodnie z symboliką Kendalla ten SOM ma oznaczenie: $M/M/n:(\infty, \infty)$.

1. prawdopodobieństwo tego, że wszystkie kanały obsługi są wolne (w systemie nie ma obsługiwanych zgłoszeń):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)}},$$

2. prawdopodobieństwo tego, że w systemie znajduje się k zgłoszeń i jest ich:

- mniej niż kanałów obsługi: $1 \leq k \leq n$ (zajętych jest k kanałów obsługi ale są jeszcze wolne kanały i nie tworzy się kolejka),
- tyle samo ile kanałów obsługi: $k = n$ (zajęte są wszystkie kanały obsługi ale jeszcze nie tworzy się kolejka),
- więcej niż kanałów obsługi: $k > n$ (zajęte są wszystkie kanały obsługi i tworzy się kolejka zgłoszeń oczekujących na obsługę):

$$P_k = P_0 \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} & \text{dla } 1 \leq k \leq n \\ \frac{\rho^k}{n! n^{k-n}} & \text{dla } k > n \end{cases} \quad (\text{dla } k = n \text{ obie zależności dają się takie same wyniki}),$$

3. prawdopodobieństwo tego, że nadchodzące zgłoszenie zajmuje miejsce w kolejce (bo

wszystkie kanały obsługi są zajęte: $k \geq n$):
$$\Pi = \frac{P_{k=n}}{1 - \frac{\rho}{n}} = P_0 \frac{\rho^n}{n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)} = P_0 \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)},$$

4. prawdopodobieństwo tego, że czas oczekiwania na początek obsługi β jest większy od t :

$$P(\beta > t) = \Pi e^{-(n\mu - \lambda)t} = \Pi e^{-n\mu \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)t},$$
 β - zmienna losowa oznaczająca czas oczekiwania na obsługiwanie,

5. średni czas oczekiwania na początek obsługi:
$$E(\beta) = \frac{\Pi}{n\mu - \lambda} = \frac{P_{k=n}}{n\mu \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2},$$

6. średnia liczba zgłoszeń oczekujących na obsługiwanie (średnia długość kolejki):

$$E_1 = \lambda E(\beta) = \frac{\lambda P_{k=n}}{n\mu\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} = \frac{\frac{\rho}{n} P_{k=n}}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2},$$

7. średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w systemie obsługiwanym (obsługiwanych

i w kolejce razem):
$$E_2 = E_1 + \sum_{k=1}^{n-1} kP_k + \frac{nP_{k=n}}{1 - \frac{\rho}{n}} = E_1 + P_0 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^k}{(k-1)!} + \frac{\rho^n}{(n-1)! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)} \right),$$

8. średnia liczba wolnych kanałów obsługi:
$$E_3 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)\rho^k}{k!}.$$

System ze stratami z ograniczoną kolejką

Czas między kolejnymi zgłoszeniami i czas obsługiwanie mają rozkłady wykładnicze odpowiednio o intensywności zgłoszeń λ i intensywności obsługiwanie μ .

System ma n kanałów obsługi.

Liczebność obsługiwanej populacji zgłoszeń jest nieskończona.

System ma L miejsc w kolejce na te zgłoszenia, które nie mogą być obsłużone natychmiast po przybyciu do systemu.

Jeżeli zgłoszenie do obsługiwanie przybywa do systemu w chwili gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte, zajmuje miejsce w kolejce i oczekuje na obsługiwanie. Jeżeli zajęte są też wszystkie miejsca w kolejce, nadchodzące zgłoszenie opuszcza system nieobsłużone (jest tracone).

Obowiązuje regulamin kolejki typu FIFO.

Zgodnie z symboliką Kendalla ten SOM ma oznaczenie: $M/M/n:(\infty, L)$.

1. prawdopodobieństwo tego, że wszystkie kanały obsługi są wolne (w systemie nie ma obsługiwanych zgłoszeń): $P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{L+1}}{1 - \frac{\rho}{n}}}$,

2. prawdopodobieństwo tego, że w systemie znajduje się k zgłoszeń i jest ich:

- mniej niż kanałów obsługi: $1 \leq k \leq n$ (zajętych jest k kanałów obsługi ale są jeszcze wolne kanały i nie tworzy się kolejka),
- tyle samo ile kanałów obsługi: $k = n$ (zajęte są wszystkie kanały obsługi ale jeszcze nie tworzy się kolejka),
- więcej niż kanałów obsługi, ale nie więcej niż kanałów obsługi i miejsc w kolejce razem: $n < k \leq L + n$ (zajęte są wszystkie kanały obsługi i tworzy się kolejka zgłoszeń oczekujących na obsługiwanie, ale zgłoszenia nie są jeszcze tracone),
- więcej niż kanałów obsługi i miejsc w kolejce razem: $k > L + n$ (zajęte są wszystkie kanały obsługi i wszystkie miejsca w kolejce, przychodzące zgłoszenie jest tracone) – **prawdopodobieństwo odmowy obsługi** kolejnego zgłoszenia (najistotniejsza informacja o SOM ze stratami):

$$P_k = P_0 \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} & \text{dla } 1 \leq k \leq n \\ \frac{\rho^k}{n! n^{k-n}} & \text{dla } n < k \leq L + n \end{cases},$$

dla $k = n$ obie zależności dają się takie same wyniki,

dla $k = n + L$ druga zależność daje $P_{k=n+L} = P_0 \frac{\rho^{n+L}}{n^L n!}$,

3. prawdopodobieństwo tego, że nadchodzące zgłoszenie zajmuje miejsce w kolejce (bo wszystkie kanały obsługi są zajęte: $n \leq k \leq n + L$):

$$\Pi = P_{k=n} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{L+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} = P_0 \frac{\rho^n}{n!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{L+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} = P_0 \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{L+1}\right),$$

4. prawdopodobieństwo tego, że czas oczekiwania na początek obsługi β jest większy od t :

$$P(\beta > t) = \frac{\Pi e^{-n\mu t}}{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{L+1}} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{(n\mu t)^k}{k!} \left(\left(\frac{\rho}{n}\right)^k - \left(\frac{\rho}{n}\right)^L \right), \text{ gdzie } \beta \text{ jest zmienną losową oznaczającą}$$

czas oczekiwania na obsługiwane,

5. przeciętna liczba zgłoszeń oczekujących na obsługiwane (przeciętna długość kolejki):

$$E_1 = \frac{\frac{\rho}{n} - (L+1) \left(\frac{\rho}{n}\right)^{L+1} + L \left(\frac{\rho}{n}\right)^{L+2}}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} P_{k=n},$$

6. przeciętna liczba zgłoszeń znajdujących się w systemie obsługiwanym (obsługiwanych i w kolejce razem):

$$E_2 = E_1 + \sum_{k=1}^{n-1} kP_k + nP_{k=n} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{L+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} = E_1 + P_0 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^k}{(k-1)!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{L+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} \right),$$

7. przeciętna liczba wolnych kanałów obsługi: $E_3 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)\rho^k}{k!}.$

System ze stratami z zabronioną kolejką

Czas między kolejnymi zgłoszeniami i czas obsługiwaną mają rozkłady wykładnicze odpowiednio o intensywności zgłoszeń λ i intensywności obsługiwaną μ .

System ma n kanałów obsługi.

Liczebność obsługiwaną populacji zgłoszeń jest nieskończona.

Jeżeli zgłoszenie do obsługi przybywa do systemu w chwili gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte to opuszcza system nieobsłużone (jest tracone).

Zgodnie z symboliką Kendalla ten SOM ma oznaczenie: $M/M/n:(\infty,0)$.

1. prawdopodobieństwo tego, że wszystkie kanały obsługi są wolne (w systemie nie ma obsługiwanych zgłoszeń): $P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}}$,

2. prawdopodobieństwo tego, że w systemie znajduje się k zgłoszeń i jest ich:

- mniej niż kanałów obsługi: $1 \leq k \leq n$ (zajętych jest k kanałów obsługi ale są jeszcze wolne kanały),
- tyle samo ile kanałów obsługi: $k = n$ (zajęte są wszystkie kanały obsługi, każde przychodzące zgłoszenie jest tracone) – **prawdopodobieństwo odmowy obsługi** kolejnego zgłoszenia (najistotniejsza informacja o SOM ze stratami):

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0,$$

3. średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w systemie obsługiwanym:

$$E = \sum_{k=1}^n k P_k = P_0 \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{(k-1)!}.$$

Zasady wykorzystania metod obsługi masowej w projektowaniu systemów obsługiwanie urządzeń.

System obsługiwanie urządzeń powinien być dostosowany do potrzeb systemu użytkowania, na rzecz którego realizuje prace obsługowo-naprawcze – miarą tego dostosowania jest zapewnienie wymaganych wskaźników procesu użytkowania urządzeń.

Strumień zgłoszeń maszyn na obsługiwania planowe (zeterminowane) i losowe uwarunkowany jest właściwościami systemu użytkowania.

Czas obsługiwania zgłoszenia jest zeterminowany właściwościami technicznymi urządzeń oraz wyposażeniem technicznym stanowisk obsługi i umiejętnościami obsługujących.

W danym systemie eksploatacji, spośród trzech podstawowych (λ , μ , n) parametrów systemu obsługiwania, w miarę dowolnym zmianom może podlegać jedynie liczba stanowisk obsługi n .

Projektowanie systemu obsługiwania polega na wyznaczeniu, dla danych λ i μ , takiej liczby stanowisk obsługi n , aby spełnione zostały wymagane wskaźniki procesów obsługiwania i użytkowania.

Najczęściej stosowanym kryterium jakości funkcjonowania systemu obsługiwania jest zapewnienie określonej wartości współczynnika gotowości zbioru (parku) urządzeń.

Dla zbioru urządzeń współczynnik gotowości można określić jako $k_g = \frac{m - E_2}{m}$, m - liczba urządzeń eksploatowanych w parku, E_2 - średnia liczba urządzeń znajdujących się w systemie obsługiwanym.

Projektując system obsługiwanym należy przede wszystkim zidentyfikować typ systemu, aby określić zbiór jego charakterystyk. Zakłada się, że znane są lub wymagają określenia właściwości strumienia zgłoszeń oraz czasu obsługiwanym (λ i μ).

Algorytm projektowania systemu obsługi zapewniający wymaganą wartość współczynnika gotowości parku (zbioru) urządzeń k_{gr} dla systemu obsługi bez strat z ograniczonym strumieniem zgłoszeń.

1. Określić parametry λ i μ systemu.
2. Założyć wstępnie minimalną liczbę stanowisk n z warunku $n > \frac{\lambda}{\mu}$ np. jako $n = \text{entier}\left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right)$.
3. Obliczyć prawdopodobieństwo P_0 , że wszystkie stanowiska obsługi są wolne.
4. Obliczyć prawdopodobieństwo P_n , że w systemie znajduje się dokładnie n zgłoszeń.
5. Obliczyć średnią długość kolejki E_1 .
6. Obliczyć przeciętną liczbę zgłoszeń znajdujących się w systemie obsługi E_2 .
7. Obliczyć wartość współczynnika gotowości parku $k_g = \frac{m - E_2}{m}$, m - liczba urządzeń eksploatowanych w parku, E_2 - średnia liczba urządzeń znajdujących się w systemie obsługi.
8. Sprawdzić spełnienie warunku $k_g \geq k_{gr}$: jeżeli warunek nie jest spełniony, zwiększyć liczbę stanowisk obsługi o 1 i powrócić do punktu 3 algorytmu; jeżeli warunek został spełniony, zakończyć obliczenia dla aktualnej liczby stanowisk n .

Przykład

W przedsiębiorstwie komunikacyjnym eksploatowanych jest $m = 150$ pojazdów (np. autobusów w MPK). Średnia intensywność eksploatacji wynosi $\alpha_e = 30$ tys. km/dobę. Znana jest pracochłonność obsługiwanego pojazdu przypadająca na $L_0 = 3000$ km przebiegu – wynosi $\tau = 8$ h pracy stanowiska obsługowego. Obliczyć, ile stanowisk obsługi powinno znajdować się w warsztacie przedsiębiorstwa, aby współczynnik gotowości zbioru pojazdów był nie mniejszy niż $k_{gr} = 0,9$. Dzień roboczy stanowisk obsługowych trwa 8 h.

System bez strat z ograniczonym strumieniem zgłoszeń. Duża liczba potencjalnych zgłoszeń do systemu ($m = 150$) – zbiór charakterystyk dla systemu z nieograniczonym strumieniem zgłoszeń:

1. parametry λ , μ systemu:

$$\lambda = \frac{\alpha_e}{L_0} = \frac{30000 \frac{\text{km}}{\text{doba}}}{3000 \text{ km}} = 10 \frac{1}{\text{doba}} \quad \text{i} \quad \mu = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{8 \text{ h}} = \frac{1}{\text{dzień rob.}} = \frac{1}{\text{doba}}$$

$$\text{stąd: } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10 / \text{doba}}{1 / \text{doba}} = 10,$$

2. minimalna liczba stanowisk obsługi $n = \text{entier} \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) = \text{entier}(10 + 1) = 11,$

3. prawdopodobieństwo, że w systemie nie ma zgłoszeń

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{10} \frac{10^k}{k!} + \frac{10^{11}}{11!(1-\frac{10}{11})}} \approx \frac{1}{40399,624} \approx 2,475 \times 10^{-5},$$

4. prawdopodobieństwo, że w systemie znajduje się $n = 11$ zgłoszeń

$$P_{11} \approx \frac{10^{11}}{11!} \times 2,475 \times 10^{-5} \approx 0,062,$$

5. przeciętna długość kolejki $E_1 \approx \frac{\frac{10}{11}}{\left(1 - \frac{10}{11}\right)^2} \times 0,062 \approx 6,82,$

6. przeciętna liczba pojazdów znajdujących się w systemie obsługiwanym

$$E_2 \approx 6,82 + 2,475 \times 10^{-5} \left(\sum_{k=1}^{10} \frac{10^k}{(k-1)!} + \frac{10^{11}}{10! \left(1 - \frac{10}{11}\right)} \right) \approx 6,82 + 2,475 \times 10^{-5} \times 403996,24 \approx 16,82,$$

7. wartość współczynnika gotowości zbioru pojazdów $k_g \approx \frac{150 - 16,82}{150} \approx 0,89,$

8. Obliczona wartość k_g jest mniejsza od wymaganej w warunkach przykładu $k_{gr} = 0,90$ i konieczne jest zwiększenie liczby stanowisk.

Po przyjęciu wartości $n = 12$ obliczenia należy powtórzyć od punktu 3.

3. prawdopodobieństwo, że w systemie nie ma zgłoszeń

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{11} \frac{10^k}{k!} + \frac{10^{12}}{12! \left(1 - \frac{10}{12}\right)}} \approx \frac{1}{27872,57} = 3,588 \times 10^{-5},$$

4. prawdopodobieństwo, że w systemie znajduje się $n = 12$ zgłoszeń

$$P_{12} = \frac{10^{12}}{12!} \times 3,588 \times 10^{-5} = 0,075,$$

5. przeciętna długość kolejki $E_1 = \frac{\frac{10}{12}}{\left(1 - \frac{10}{12}\right)^2} \times 0,075 = 2,25,$

6. przeciętna liczba pojazdów znajdujących się w systemie obsługiwanym

$$E_2 \approx 2,25 + 3,588 \times 10^{-5} \left(\sum_{k=1}^{11} \frac{10^k}{(k-1)!} + \frac{10^{12}}{11! \left(1 - \frac{10}{12}\right)} \right) \approx 2,25 + 3,588 \times 10^{-5} \times 278735,70 \approx 12,25,$$

7. wartość współczynnika gotowości zbioru pojazdów $k_g = \frac{150 - 12,25}{150} = 0,918,$

8. obliczona wartość k_g jest większa od wymaganej w warunkach przykładu $k_{gr} = 0,90$ i konieczne jest przyjęcie $n = 12$ stanowisk obsługi.