

GRZEGORZ BORUTA

WPROWADZENIE DO METROLOGII

BŁĄD I NIEPEWNOŚĆ

Każdy wynik pomiaru obarczony jest błędem i nie można być jego pewnym.

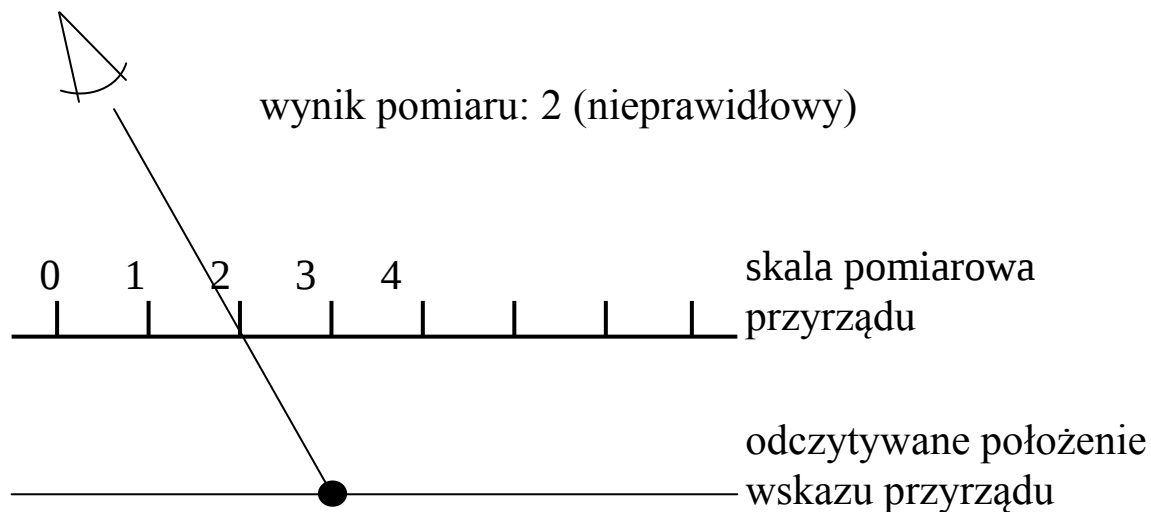
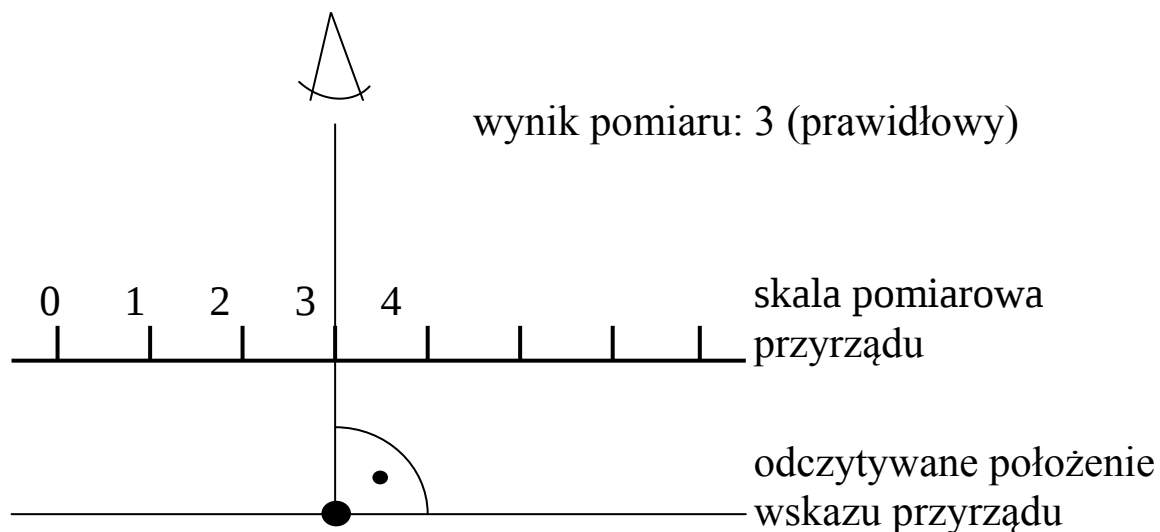
Źródłami błędów i niepewności wyniku pomiaru mogą być:

- błędy przyrządów pomiarowych, związane z ich dokładnością (błędem wewnętrznego wzorca), powtarzalnością działania, czułością, rozdzielczością, histerezą itd.,
- błędy przyjętej zasady i metody pomiaru (np. nieuwzględnianie pojemności cieplnej, sprężystości i plastyczności, tarcia, burzliwości przepływu itp.),
- błędy ustawienia przyrządu pomiarowego względem właściwego miejsca i orientacji dla badanego procesu (błędy wynikające z niewłaściwego ukształtowania strefy styku elementów czynnych czujnika z śledzonymi elementami badanego procesu),
- błędy wykonywanych obliczeń i przetwarzania danych (np. błąd uproszczeń wzorów i błąd zaokrągleń wyników obliczeń),
- błędy wynikające z działania czynników wpływających na tor pomiarowy i na obserwatora,

- błędy obserwatora, głównie błędy odczytania wskazania przyrządu (ustalenia przez mierzącego wartości mierzonej wielkości na podstawie przyjętego wskazania przyrządu pomiarowego), wynikające:
 - ze złego oświetlenia skali pomiarowej (za ciemno – nic nie widać, za jasno – oślepienie),
 - ze złego wykonania elementów odtwarzających jednostki miar (za długie lub za krótkie długości działek elementarnych, za grube lub za cienkie kreski wskaźnikowe, za słaby kontrast między elementami wskazującymi a tłem skali pomiarowej),
 - z niedokładności zmysłów (niedokładna ocena wzajemnego położenia elementu mierzącego i mierzonego, niedokładna ocena długości części działki elementarnej),
 - z braku umiejętności (niskie kwalifikacje lub brak doświadczenia),
 - z nieodpowiedniego stanu psychicznego (roztargnienie, zmęczenie, złe samopoczucie, lekceważenie wagi wyniku pomiaru);

Całkowity błąd pomiaru jest sumą wszystkich błędów występujących podczas jego wykonywania.

Z braku umiejętności może wynikać błąd paralaksy – ukośne patrzenie na podziałkę pomiarową i badany przedmiot.



Wykonując pomiar otrzymuje się subiektywnie otrzymaną wartość mierzonej wielkości – **wskazanie** – liczbę x .

Wynik ten może różnić się od **wartości prawdziwej**, rzeczywistej, istniejącej obiektywnie – **mezurandu** (ang. *measurand*, fr. *mesurande* – to co się mierzy) – liczby x_0 , o wartość $\Delta x = x - x_0$.

Różnica ta to **bezwzględny błąd (błąd wskazania)**, wyrażany w tych samych jednostkach, w jakich wyrażana jest wielkość mierzona.

Ponieważ całą informację o mierzonym obiekcie lub zjawisku czerpie się z subiektywnego wyniku pomiaru x to nie zna się wartości rzeczywistej, a przez to wartości zrobionego błędu.

W praktyce operuje się **wartością umownie prawdziwą (odniesienia, przypisaną, umowną, najlepszym oszacowaniem wartości prawdziwej)** – wartością x_0 , umownie przyjętą i przypisaną do wielkości mierzonej i którą uważa się za wzorzec (etalon) wartości prawdziwej mierzonej wielkości dla określonych warunków wykonania pomiaru, klasy dokładności działania stosowanego przyrządu pomiarowego i innych czynników, np. prawnych dotyczących danego pomiaru, z niepewnością akceptowaną w danym zastosowaniu.

Błąd bezwzględny Δx odniesiony do zarejestrowanej wartości wielkości mierzonej to **błąd względny** $\delta_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{x - x_0}{x}$, o wartości niemianowanej – jest to zwykle dość mały ułamek – można go mnożyć przez 100 % lub 1000 ‰, co daje błąd względny wyrażony w procentach lub promilach, można go też wyrażać w miarach logarytmicznych (np. dB).

Dla określonych warunków wykonania pomiaru, klasy dokładności stosowanego przyrządu pomiarowego i innych czynników, podaje się założoną lub obliczoną z pewnych zależności, wykorzystujących wartość umownie prawdziwą, umowną wartość maksymalnego błędu rzeczywistego $\Delta_g x$ (jest ona z reguły nazywana **błędem dopuszczalnym** lub **granicznym** pomiaru).

Wtedy zakłada się, że rzeczywista, nieznana, wartość x_0 mierzonej wielkości zawarta jest w przedziale $[x - \Delta_g x, x + \Delta_g x]$, określonym dla wartości zmierzonej x i przyjętego bezwzględnego błędu granicznego pomiaru $\Delta_g x$.

Często, trochę niewłaściwie, zapisuje się to w postaci $x \pm \Delta_g x$.

Posługiwanie się pojęciem **błędu** pomiaru zakłada znajomość wartości prawdziwej (mierzonej), która w ogólności nigdy nie jest znana. Znane są tylko empirycznie otrzymane wyniki pomiarów (wartości zmierzone) oraz umownie przyjęta wartość odniesienia (nie wiadomo jak bliska wartości rzeczywistej).

Dlatego lepiej posługiwać się miarą oceny poprawności wyniku pomiaru opartą nie o jego błąd (co było praktykowane przez wiele lat do końca XX w.), ale niewykorzystującą definicyjnie wartości prawdziwej czy umownie przyjmowanej za prawdziwą. Taką miarą jest **niepewność** pomiaru, stosowana coraz szerzej od końca XX w., dziś już w zasadzie powszechnie.

Błędy systematyczne $\Delta_s x$

- o wartości powtarzającej się tak samo w każdym pomiarze,
- niektóre z nich można obliczyć (wyznaczyć deterministycznie) w konkretnym przypadku pomiarowym na podstawie znajomości danego procesu pomiarowego i skorygować o nie **wynik surowy** pomiaru:
 - addytywnie **poprawką systematyczną** (np. błąd zera przyrządu),
 - multiplikatywnie **systematycznym współczynnikiem poprawkowym** (np. błąd czułości przyrządu),otrzymując **wynik poprawiony**; czasem producenci przyrządów określają aparaturowe charakterystyki korekcyjne (kalibracyjne) dla korzystania z przyrządów w warunkach nieznamionowych,
- nie można zidentyfikować ich wszystkich – wynik poprawiony może ciągle zawierać te błędy,
- określają dokładność (rzetelność, obciążenie) każdego pomiaru.

Błędy przypadkowe (losowe) $\Delta_p x$

- o wartościach zmieniających się losowo (nieprzewidywalnie) w każdym pomiarze; dają losowo zmienne wyniki pomiarów – wyniki wielokrotnie powtarzanych pomiarów tej samej wartości mierzonej wielkości wykonywanych w tych samych warunkach mogą się różnić, ale nie mogą tworzyć trendu ani rosnącego ani malejącego,
- nie można podać jakichkolwiek sposobów ich korekcji, a jedynie, na bazie metod statystycznych, wyznaczyć dla nich pewne wartości oceniające, np. średnią wartość błędu czy postać rozkładu probabilistycznego opisującego wartość błędu,
- określają powtarzalność (precyzję) pomiaru wielokrotnego.

Błędy systematyczne $\Delta_s x$

- zidentyfikowane w stopniu pozwalającym na korygowanie wyniku surowego: $\Delta_{s,zid}x$,
- zidentyfikowane, ale niedające się korygować, czyli w zasadzie niezidentyfikowane,
- niezidentyfikowane, bo nieuświadomione i przez to niekorygowalne: $\Delta_{s,nzid}x$.

Błędy przypadkowe (losowe) $\Delta_p x$

- niekorygowalne,
- niewyznaczalne dla pojedynczego pomiaru,
- podlegają statystycznej ocenie dla wielu powtórzeń pomiaru.

Wynik pomiaru: $x = x_0 + \Delta x = x_0 + \Delta_s x + \Delta_p x = x_0 + \Delta_{s,zid}x + \Delta_{s,nzid}x + \Delta_p x = x_{pop} + \Delta_{s,nzid}x + \Delta_p x$

Odpowiednio: $x_0 = x - \Delta x = x - \Delta_s x - \Delta_p x = x - \Delta_{s,zid}x - \Delta_{s,nzid}x - \Delta_p x = x_{pop} - (\Delta_{s,nzid}x + \Delta_p x)$

Zapisy te dotyczą każdego pojedynczego wyniku pomiaru.

Błędy grube (nadmierne) są powodowane przez pomyłki, złe lub niestaranne odczyty, czasowo niezdatne przyrządy pomiarowe lub bardzo silne zewnętrzne czynniki wpływające. Wynik pomiaru obarczony błędem grubym jest wynikiem wyraźnie odstającym od innych.

Błędy addytywne addytywnie (sumacyjnie) nakładają się na wartości mierzonej wielkości. Nie zależą od wartości mierzonej wielkości i objawiają się jako niepożądane przesunięcie punktu zerowego przyrządu (dodają się do składowej stałej sygnału). Im większa jest wartość mierzonej wielkości, tym mniejszy dają błąd względny przy takim samym błędzie bezwzględnym, a dla bardzo małych wartości wielkości mierzonej mogą dać błąd bezwzględny większy od tej mierzonej wartości.

Błędy multiplikatywne multiplikatywnie (iloczynowo) nakładają się na wartości mierzonej wielkości. Zależą od wartości mierzonej wielkości i objawiają się jako odchylenie czułości przyrządu od wartości pożądanej (mnożą wartość sygnału). Im większa jest wartość mierzonej wielkości, tym większy dają błąd bezwzględny przy takim samym błędzie względnym.

Błędy zredukowane (klasy błędu) są to błędy bezwzględne odniesione do zakresu pomiarowego przyrządu (de facto błędy względne z zakresem pomiarowym przyrządu jako wartością odniesienia) pomnożone przez 100.

Błędy statyczne są powodowane niedokładnością przetwarzania sygnałów przez system pomiarowy znajdujący się w stanie stacjonarnym (nie zmieniającym się w czasie).

Dopuszcza się pewną, bardzo powolną, zależność od czasu (praktycznie można ją zaniedbać w trakcie trwania pojedynczego pomiaru).

Procesy wolnozmiennie - zmiany

- raz na dzień (z częstotliwością rzędu 10^{-5} Hz),
- raz na rok (z częstotliwością rzędu 3×10^{-8} Hz),
- ciągle (z częstotliwością rzędu 0 Hz).

Dryft przyrządu pomiarowego – cecha charakteryzująca sposób, w jaki parametry przyrządu, które powinny być teoretycznie stałe, zmieniają się w czasie. Dryft przejawia się wolnozmiennymi zmianami parametrów sygnału wyjściowego, związanymi z wolnozmiennym wpływem warunków otoczenia na przyrząd pomiarowy.

Starzenie przyrządu pomiarowego związane jest ze zmianą właściwości fizycznych materiałów, z których jest wykonany. Starzenie przejawia się stopniowymi zmianami parametrów przyrządu pomiarowego, np. czułości, zdolności rozdzielczej czy wartości zera przyrządu. Starzenie przyrządu pomiarowego jest związane z jego trwałością, a zmiana wskazań przyrządu pomiarowego wynikająca z jego starzenia jest określana jako **błąd trwałości**.

Błędy dynamiczne są powodowane skończoną szybkością i określoną bezwładnością przetwarzania sygnałów przez system pomiarowy. Błędy te bada się analizując odpowiedzi przyrządu na pewne ściśle określone sygnały

$$\text{np. sygnał skokowy } x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t \geq 0 \end{cases} \text{ i sinusoidalny } x(t) = A \sin \omega t.$$

Zależnie od sposobu przetwarzania sygnałów (i uzyskiwanej odpowiedzi) wyróżnia się różne typy przyrządów. Przyrządy pomiarowe są w zasadzie tylko elementami:

- bezinercyjnymi (proporcjonalnymi),
- inercyjnymi pierwszego rzędu,
- inercyjnymi drugiego rzędu.

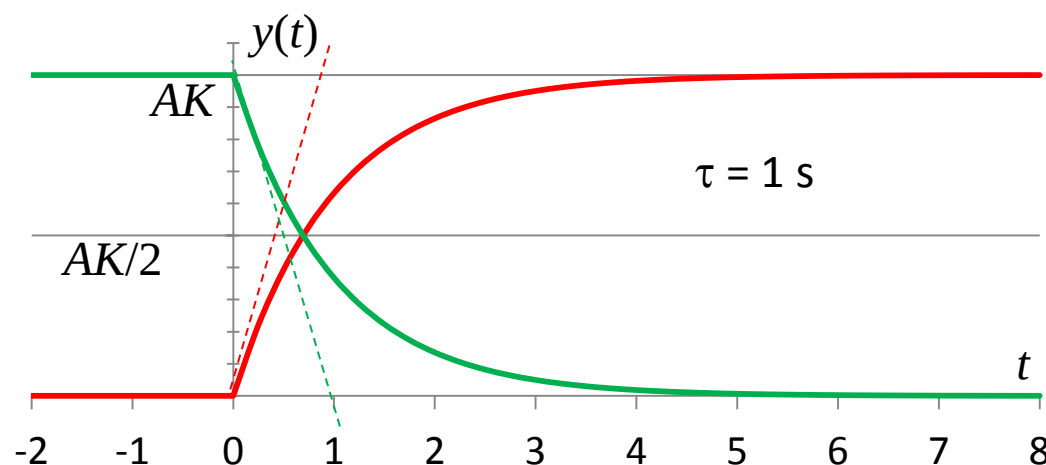
Element bezinercyjny (proporcjonalny) o czułości statycznej (stacjonarnej) K jest w praktyce najbardziej pożądany – wynik pomiaru jest natychmiastowo otrzymywany jako K -krotność sygnału wejściowego.

Nie wprowadza przesunięć fazowych składowych harmonicznym (sinusoidalnym) o różnych częstotliwościach (przesunięć w czasie składowych harmonicznym sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego) i nie zmienia widma sygnału (kształtu przebiegu czasowego).

Odpowiedzią na sygnał o określonym kształcie jest sygnał o takim samym kształcie o wartościach zmienionych K -krotnie.

Element inercyjny pierwszego rzędu o stałej czasowej τ i czułości statycznej K

linia czerwona - odpowiedź na skok rosnący o wartości A
linia zielona - odpowiedź na skok opadający o wartości A
kształt krzywych jest wykładniczy, czyli o postaci $e^{-\frac{t}{\tau}}$

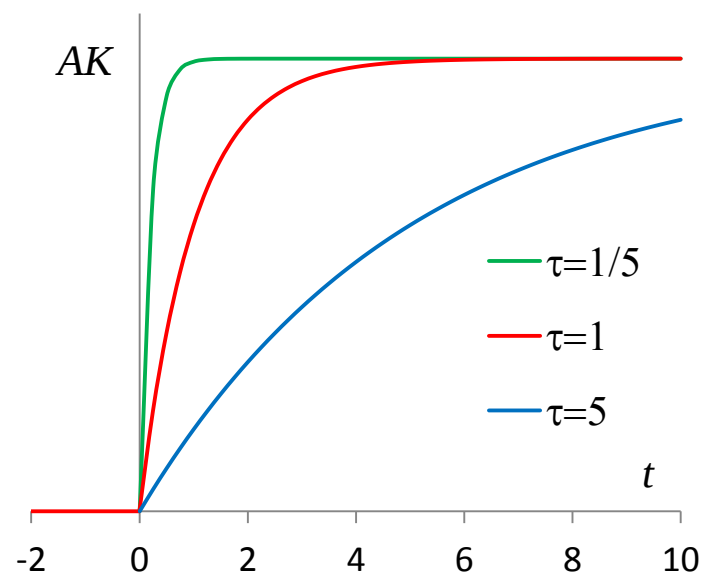


Sygnał wyjściowy osiąga:

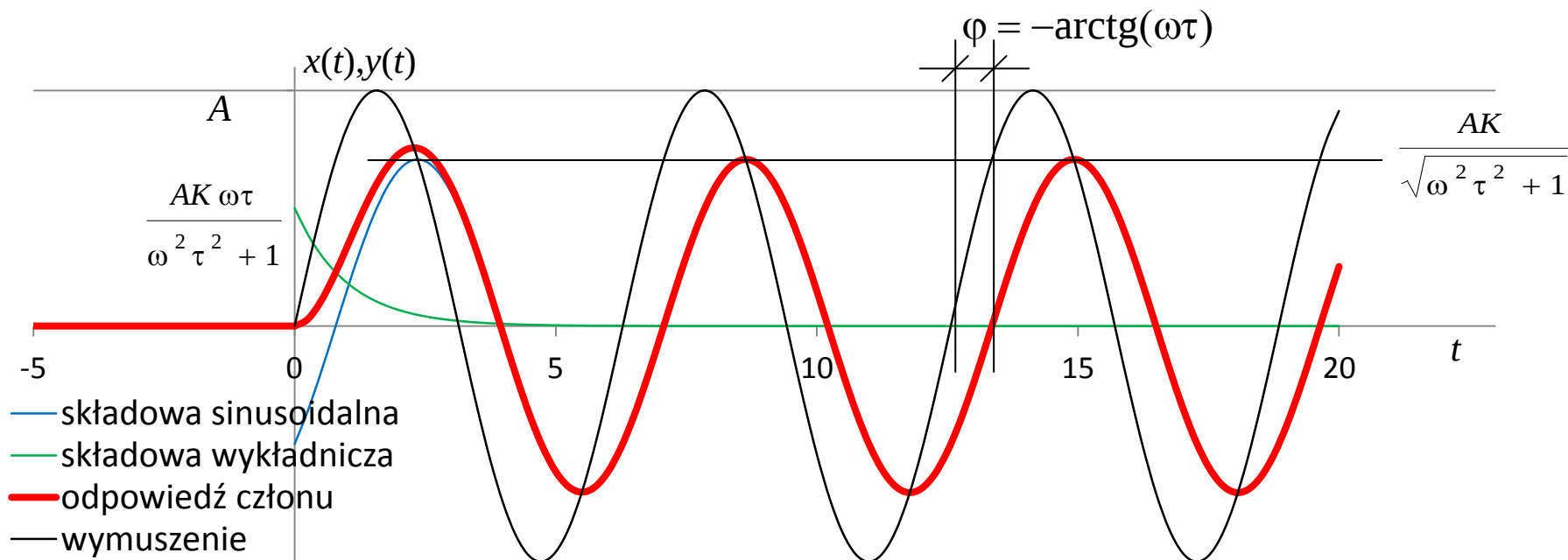
- 63,2 % poziomu ustalonego po czasie 1τ
- 85,6 % poziomu ustalonego po czasie 2τ
- 95,0 % poziomu ustalonego po czasie 3τ
- 98,2 % poziomu ustalonego po czasie 4τ
- w zasadzie poziom ustalony po czasie 5τ

Stać czasowa τ - czas, po którym sygnał wyjściowy osiągnąłby stan ustalony (stacjonarny poziom maksymalny AK (minimalny 0)), gdyby narastał (opadał) cały czas tak samo, jak w chwili początkowej.

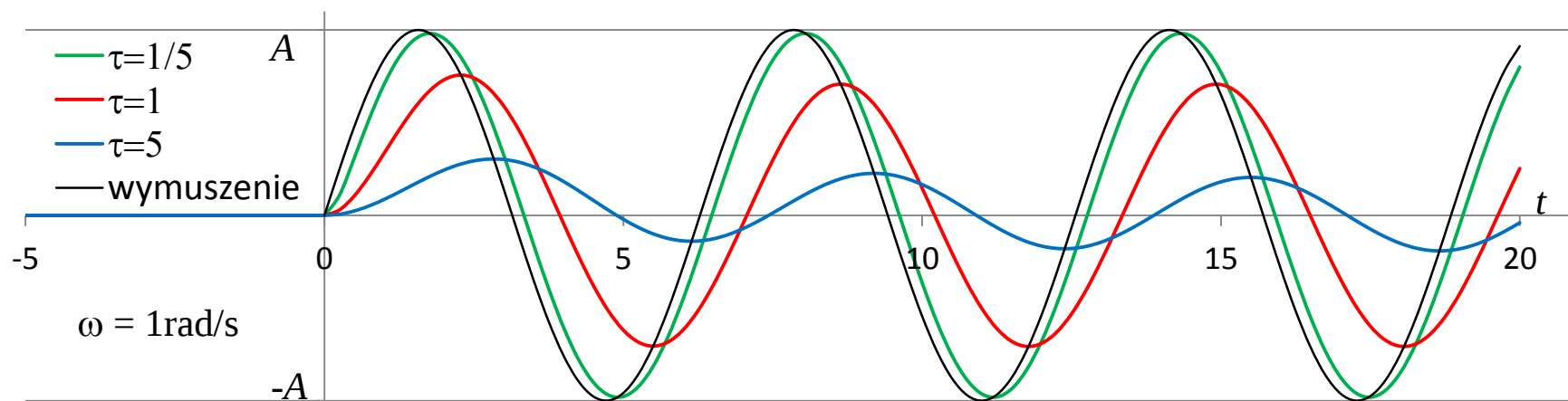
Czas uspokojenia (ustalania) – czas, po którym odpowiedź układu nie różni się od wartości końcowej (ustalonej) o więcej niż ustalone odchylenie (dla odchylenia 5 % czas uspokojenia członu inercyjnego pobudzonego skokiem jednostkowym wynosi 3τ).



odpowieź na wymuszenie sinusoidalne o amplitudzie A

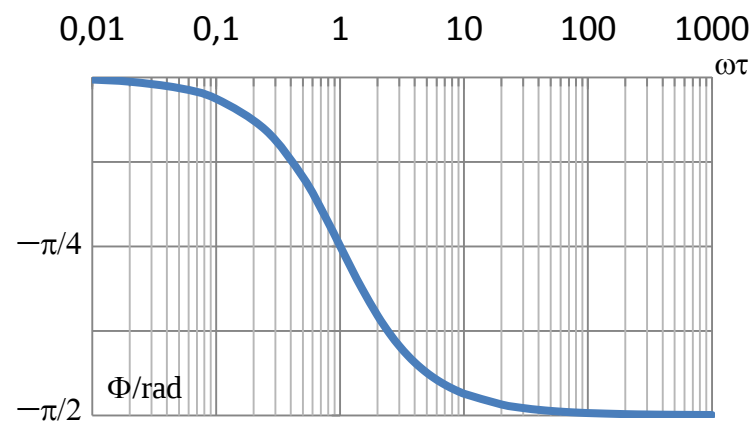
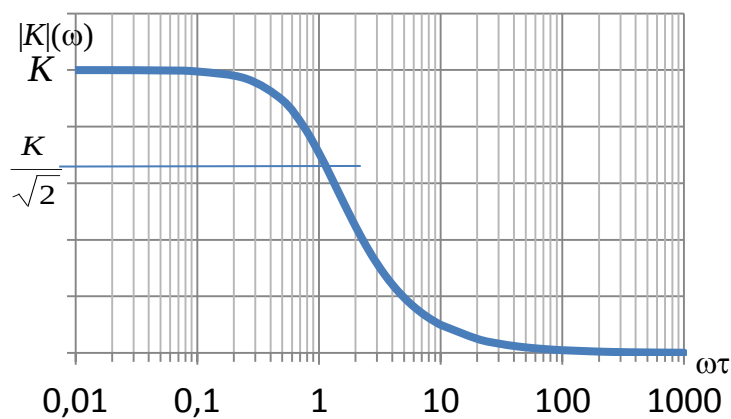
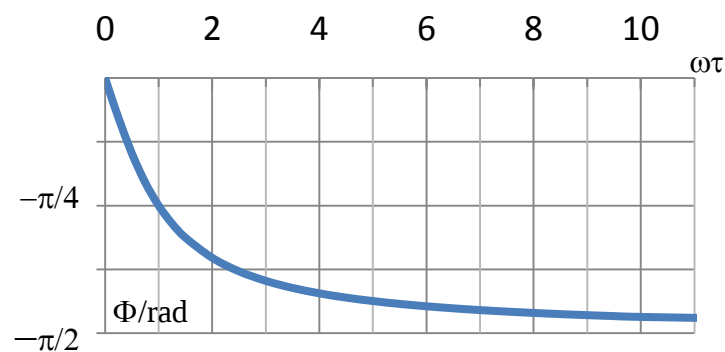
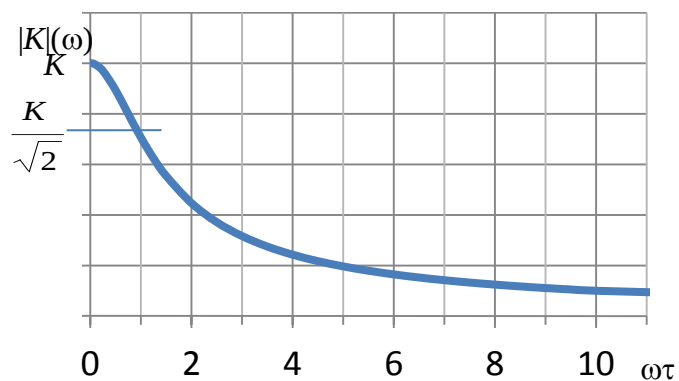


$$\tau = 1 \text{ s}, \omega = 1 \text{ rad/s}$$



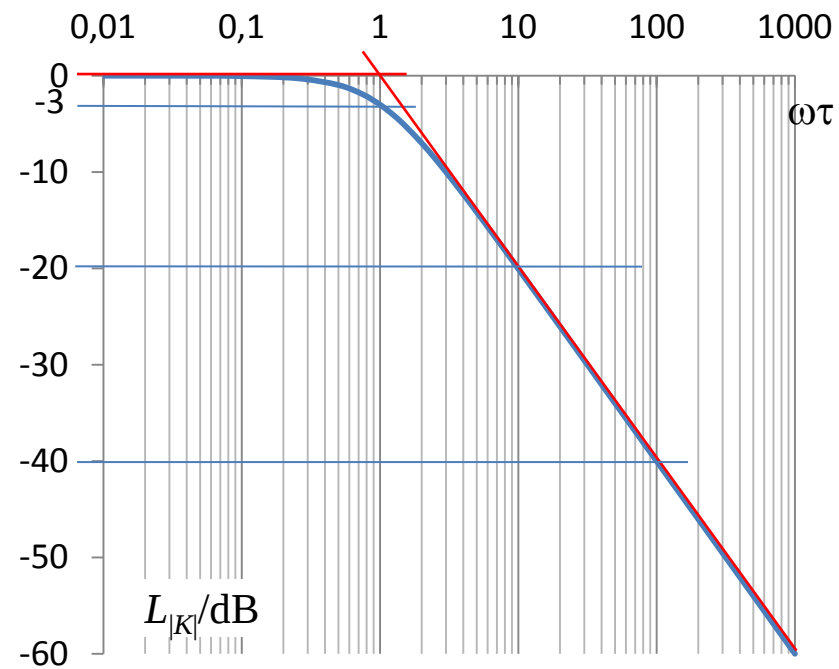
charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa $|K|(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}$

charakterystyka fazowo-częstotliwościowa $\Phi(\omega) = \arctg(-\omega\tau) = -\arctg \omega\tau$



charakterystyka logarytmiczna (decybelowa)

$$L_{|K|}(\omega) / \text{dB} = 20 \lg K - 10 \lg(\omega^2 \tau^2 + 1)$$



Element inercyjny drugiego rzędu o czułości statycznej K , częstości własnej ω_0 i stopniu tłumienia ζ

$\zeta > 1$ – element **inercyjny drugiego rzędu nadkrytyczny** o stałych czasowych $\tau_1 \neq \tau_2$ rzeczywistych

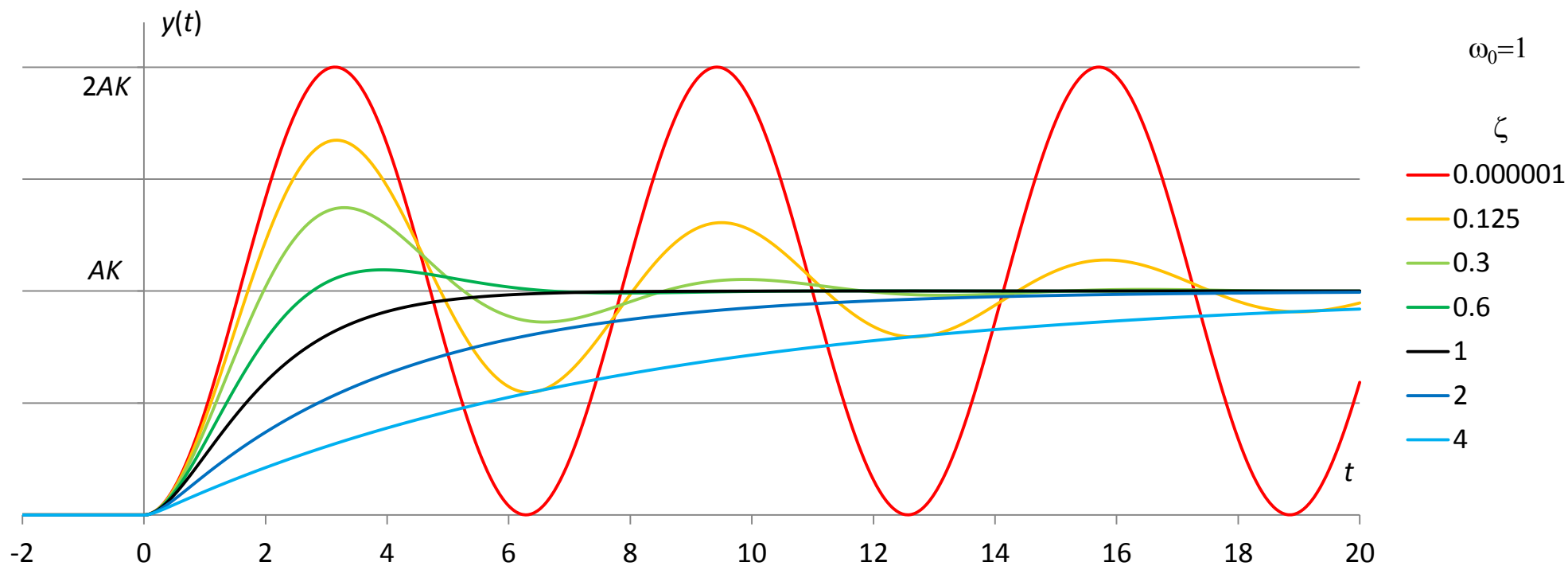
$\zeta = 1$ – element **inercyjny drugiego rzędu krytyczny** o stałych czasowych $\tau_1 = \tau_2$ rzeczywistych

$\zeta < 1$ – element **oscylacyjny** o „stałych czasowych” $\tau_1 \neq \tau_2$ zespolonych sprzężonych (są takimi stałymi tylko w sensie matematycznym, nie mają sensu fizycznego)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

$$\zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

odpowieź na skok rosnący o wartości A



kształt krzywych jest wypadkową dwóch przebiegów wykładniczych, czyli o postaciach

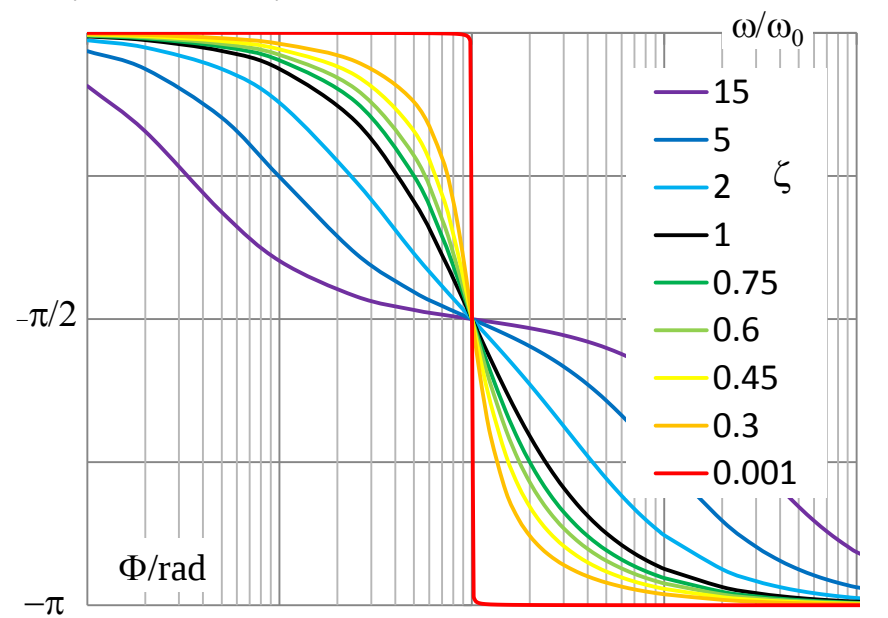
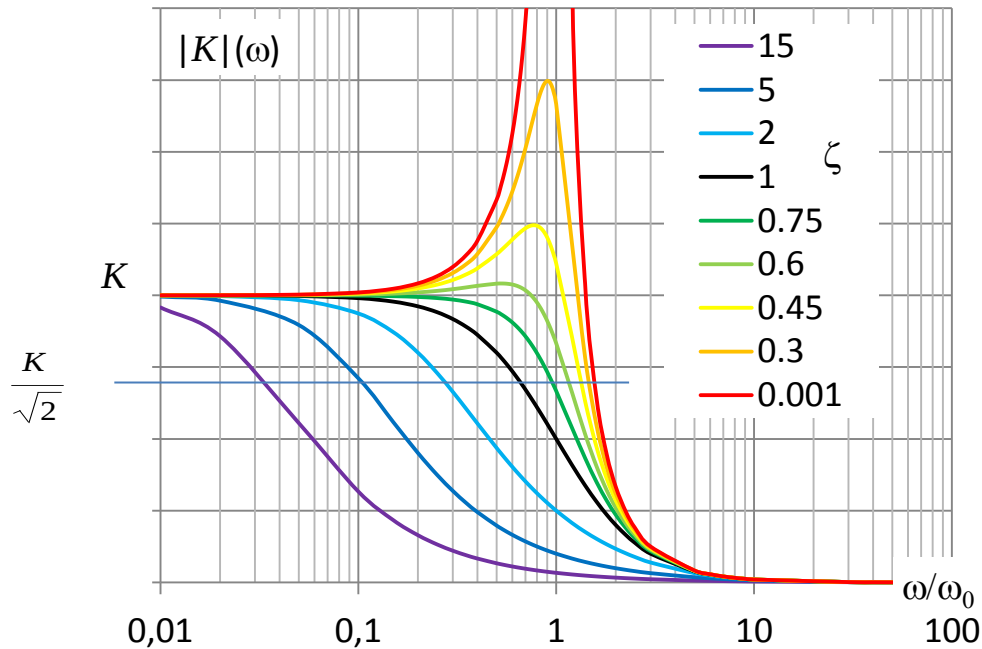
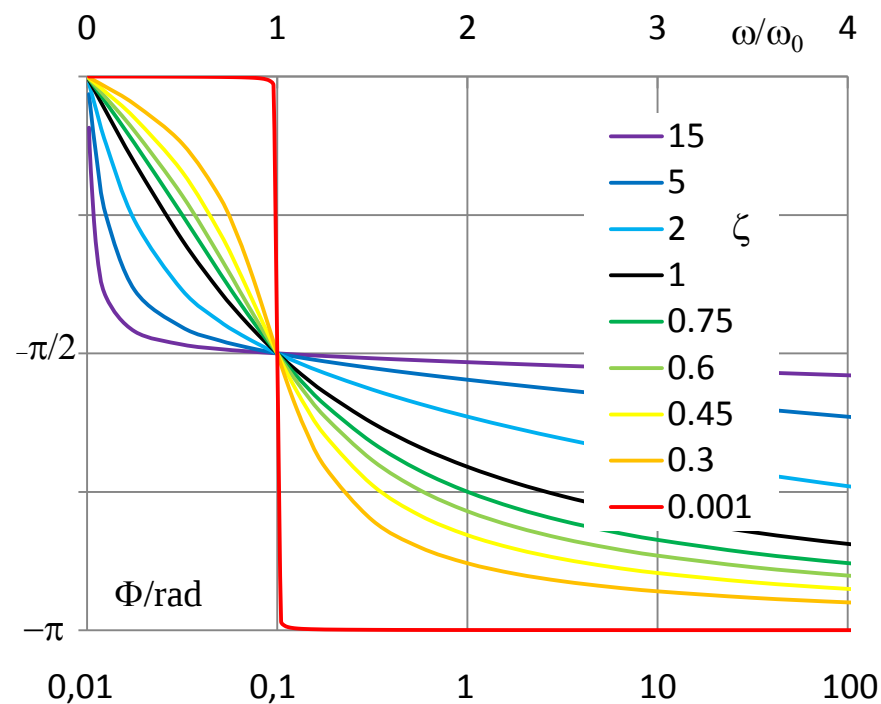
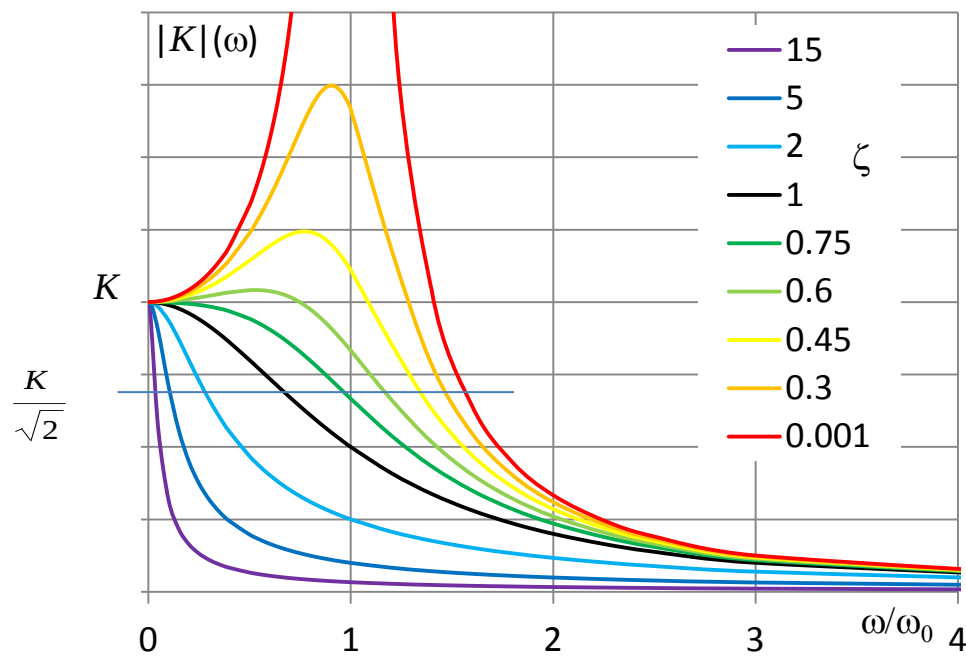
$$e^{-\frac{t}{\tau_1}} \text{ i } e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

odpowieź na wymuszenie sinusoidalne o amplitudzie A po zaniknięciu składowych wykładniczych

charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa

$$|K|(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{(1 + \tau_1^2 \omega^2)(1 + \tau_2^2 \omega^2)}}$$

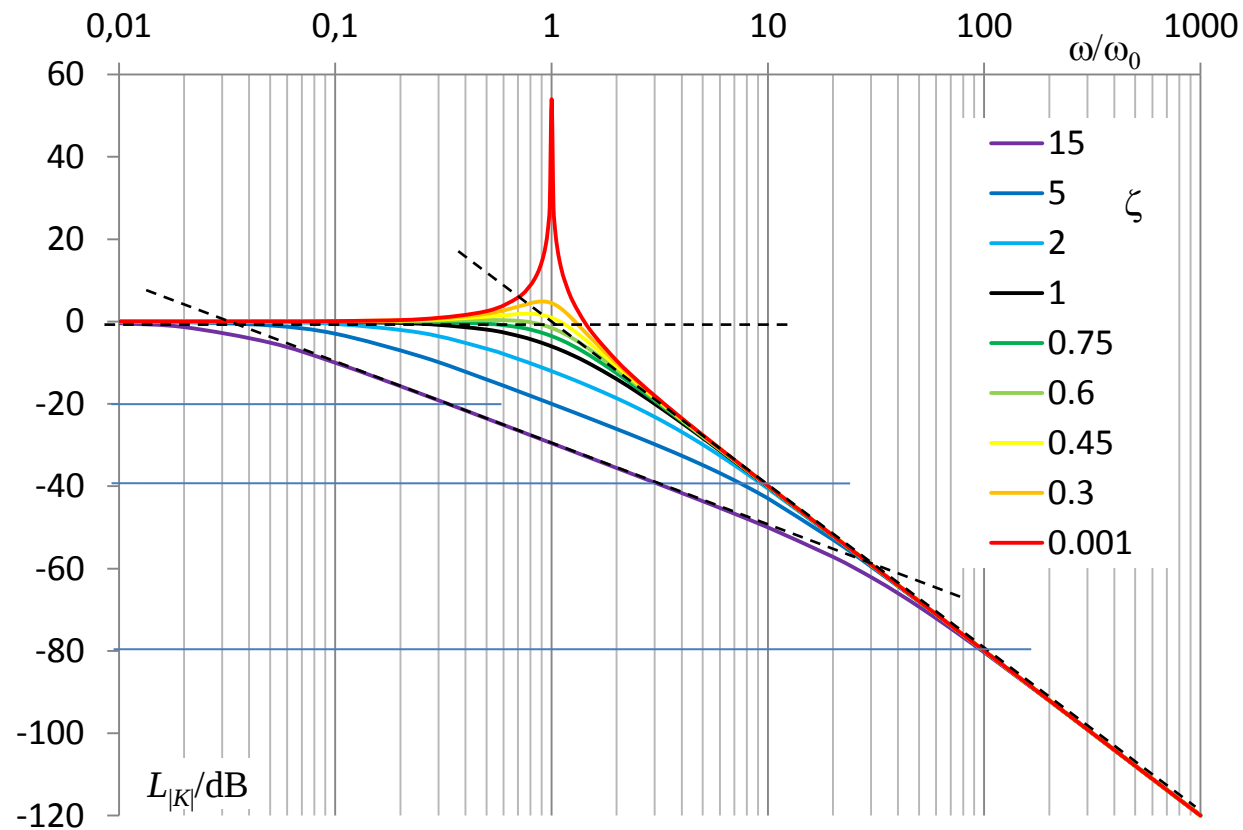
charakterystyka fazowo-częstotliwościowa $\Phi(\omega) = \arctg \frac{-2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \arctg \frac{-(\tau_1 + \tau_2)\omega}{1 - \tau_1\tau_2\omega^2}$



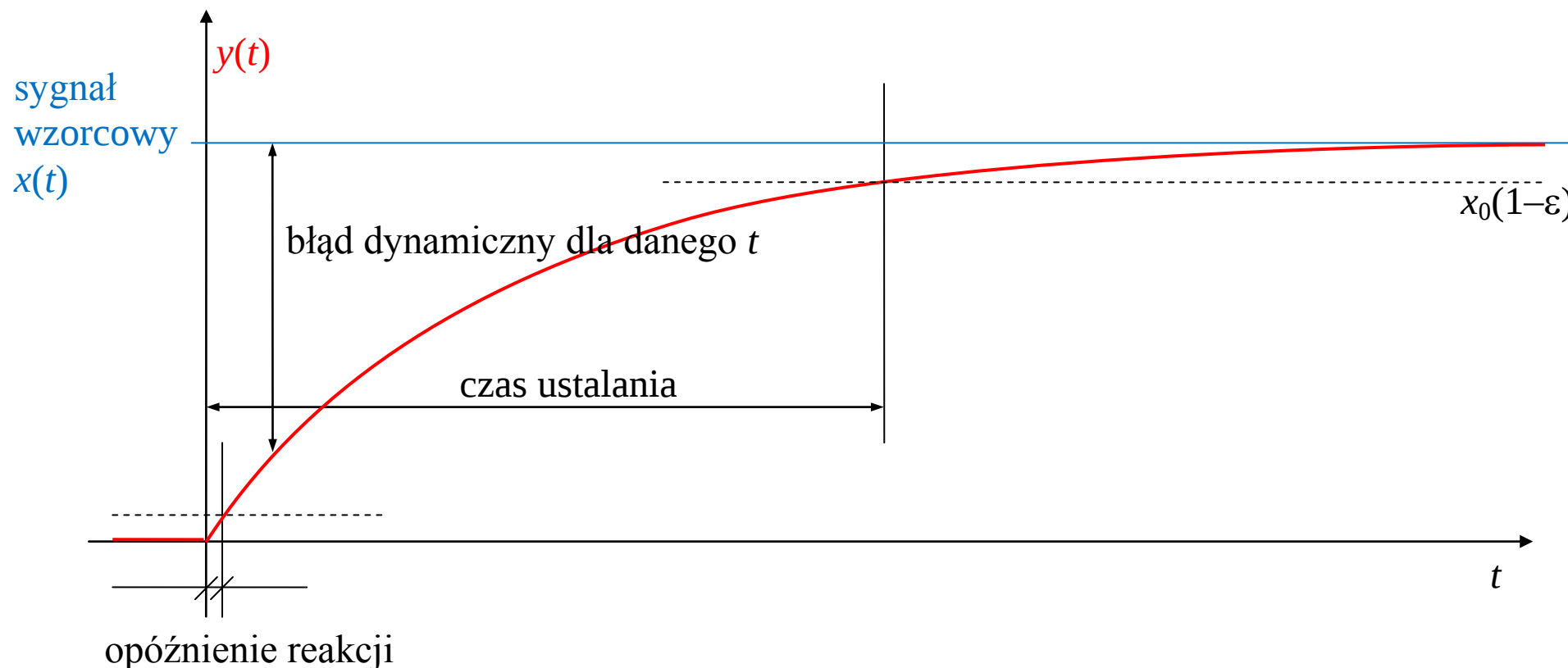
charakterystyka logarytmiczna (decybelowa)

$$L_{|K|}(\omega) / \text{dB} = 20 \lg K - 10 \lg(1 + \tau_1^2 \omega^2) - 10 \lg(1 + \tau_2^2 \omega^2)$$

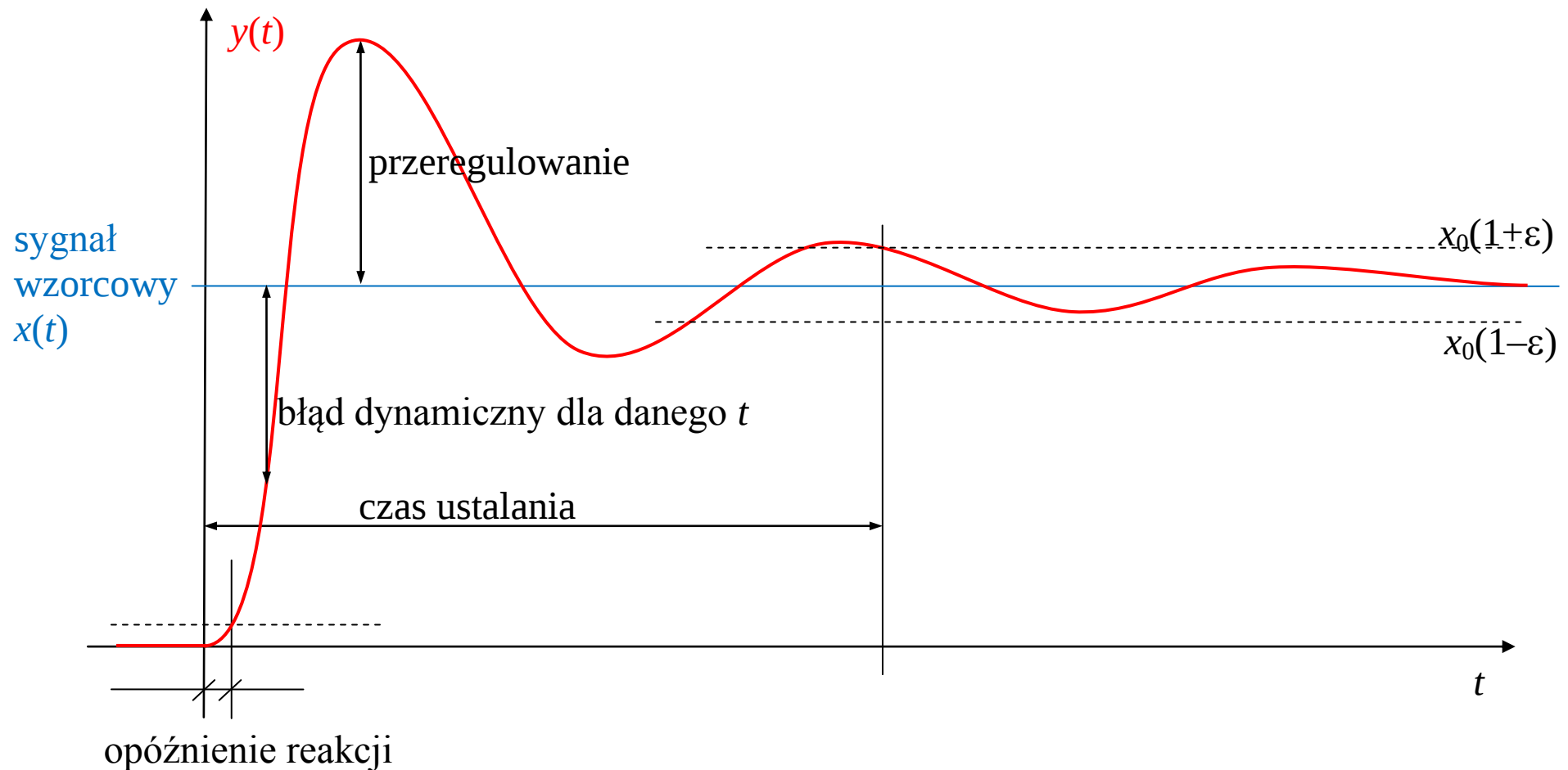
$$= 20 \lg K - 10 \lg \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$



Charakterystyczne elementy błędów dynamicznych w odpowiedzi przyrządu jako elementu inercyjnego pierwszego rzędu i drugiego rzędu o tłumieniu nadkrytycznym na sygnał skokowy



Charakterystyczne elementy błędów dynamicznych w odpowiedzi przyrządu jako elementu inercyjnego drugiego rzędu o tłumieniu podkrytycznym (oscylacyjnego) na sygnał skokowy

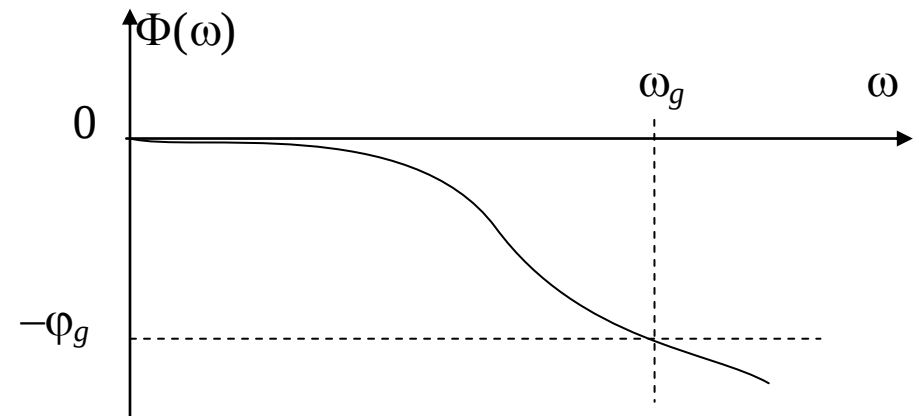
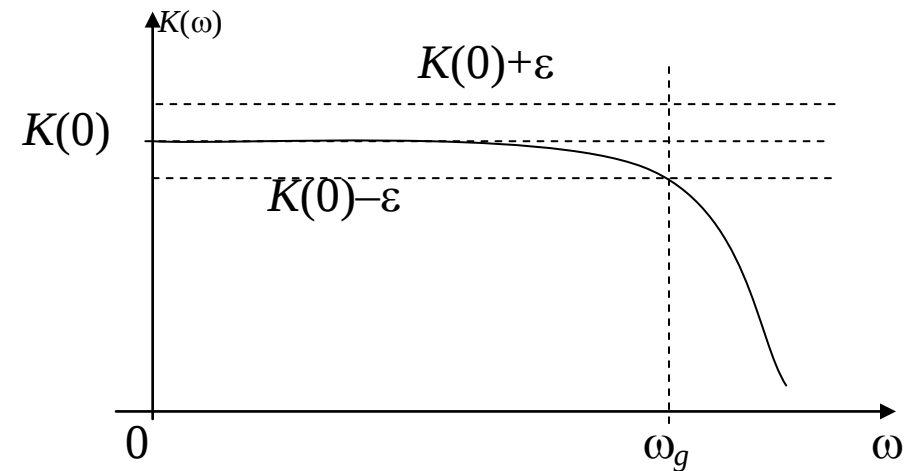


Dekrement tłumienia – stosunek następujących po sobie maksymalnych odchyłeń od wartości ustalonej.

Błędy dynamiczne przy odpowiedzi na sygnały sinusoidalne są związane z szybkością zmian sygnału wymuszającego, czyli z ich częstotliwością ω (częstotliwością f).

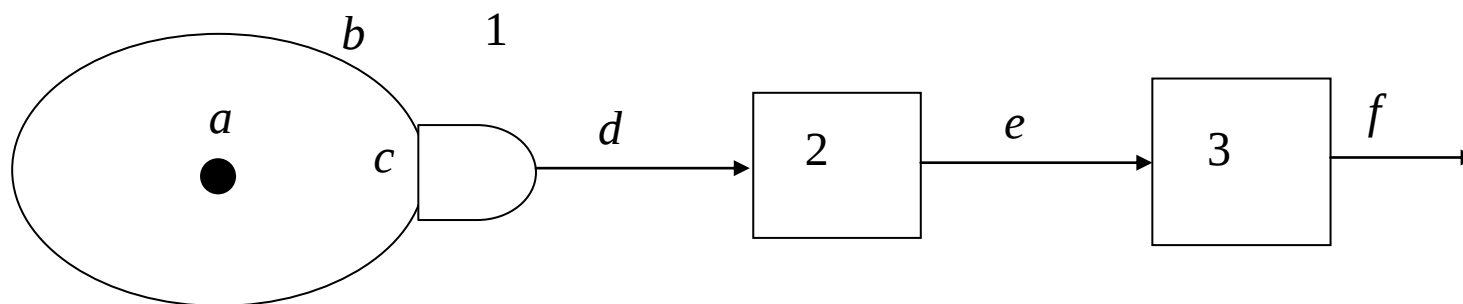
Postać sygnału odpowiedzi $y(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$ na sygnał wymuszenia $x(t) = A\sin\omega t$ zależy od częstotliwości ω .

Określa się pasmo przenoszenia przyrządu pomiarowego – przedział częstotliwości $[0, \omega_g]$, w którym charakterystyka częstotliwościowa amplitudy nie odchyła się od wartości nominalnej, określonej dla sygnałów stałych bardziej niż o ε , a charakterystyka częstotliwościowa fazy nie osiąga wartości mniejszej niż $-\varphi_g$.



Błędy metodyczne wynikają ze złego sposobu przeprowadzania pomiaru.

Np. badana jest wielkość a , bezpośrednio niedostępna (np. temperatura wewnątrz bryły) – mierzy się wielkość b pokrewną, ale dostępną (np. temperaturę powierzchni tej bryły), która zmienia się pod wpływem narzędzia pomiarowego (np. termometru wchłaniającego część ciepła i obniżającego temperaturę badanej powierzchni). W efekcie mierzona jest wielkość c , a relację c z a trudno określić.



1 – czujnik

2 – procesor

3 – wskaźnik

o określonych transmitancjach (funkcjach przejścia między wejściem i wyjściem),
dających właściwe sobie zniekształcenia, czyli błędy

a – wielkość mierzona (poszukiwana, badana)

b – wielkość dostępna pomiarowo

$c = x$ – wielkość faktycznie mierzona

d – wartość przetworzona, emitowana przez czujnik

e – wartość uznana, emitowana przez procesor

$f = y$ – wartość emitowana przez wskaźnik, wartość zmierzona, wynik pomiaru

Deterministyczne modele błędów stosowane są w przypadkach, gdy przyczyny wywołują zawsze określone skutki: powtarzanie pomiaru prowadzi zawsze do tego samego wyniku.

Modele te są (o ile są) rozważane tylko teoretycznie dla błędów systematycznych.

Dla systemów pomiarowych, w fazie konstruowania i budowania, kształtowana jest postać ich transmitancji operatorowej $K_0(s) = \frac{\mathcal{L}(y_0(t))}{\mathcal{L}(x(t))} = \frac{Y_0(s)}{X(s)}$ tak, aby spełniały stawiane im zadania.

Rzeczywista transmitancja operatorowa ma postać $K(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

Transmitancję operatorową błędu pomiaru definiuje się jako

$$K_{\Delta}(s) = \frac{K(s)}{K_0(s)} - 1 = \frac{Y(s)}{Y_0(s)} - 1 = \frac{Y(s) - Y_0(s)}{Y_0(s)} = \frac{\Delta Y(s)}{Y_0(s)}$$

(nie zależy od transformaty sygnału wejściowego x).

Wyznaczając $\Delta Y(s) = K_{\Delta}(s)Y_0(s)$ dla określonych postaci $K(s)$, $K_0(s)$ i $Y_0(s)$, można wyznaczyć wartość błędu w dziedzinie czasu jako $\Delta y(t) = \mathcal{L}^{-1} \Delta Y(s)$.

Probabilistyczne modele błędów wynikają z praktycznego wniosku, że w pewnych warunkach jedna przyczyna może powodować różne skutki: powtarzanie pomiaru w podobnych warunkach daje różne wyniki.

Pomiar wartości mierzonej wielkości jest losowaniem niezależnym próby (uzyskanych wyników pomiarów) z jej populacji (wszystkich wyników pomiarów możliwych do uzyskania) – uzyskanie danego wyniku pomiaru nie wpływa na uzyskiwanie innych wyników pomiarów.

Zróźnicowanie wyników pomiarów realizowanych w podobnych warunkach, pozornie nieregularne, podlega regułom statystyki, a zarejestrowane wartości mierzonych wielkości są traktowane jako realizacje x zmiennych losowych X . Zmienne losowe charakteryzowane są przez pewne charakterystyczne funkcje lub parametry, przy czym ich wartości są estymowane na podstawie uzyskanej próby (wyników pomiarów x_i).

Np. dla ciągłych rozkładów prawdopodobieństwa $p(x)$ (funkcji) określa się (parametry) np.:

- wartość oczekiwaną $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$ estymowaną przez średnią arytmetyczną z próby

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ,$$

- wariancję $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx$ estymowaną przez wariancję z próby $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$;

ich dodatnie pierwiastki kwadratowe to odchylenia standardowe σ i s .

Przy wielokrotnych pomiarach tej samej wartości mierzonej wielkości wykonywanych w tych samych warunkach uzyskuje się rozkład częstości występowania poszczególnych uzyskanych wartości wyników pomiarów (graficznie przedstawiany w postaci **histogramu**).

Po podzieleniu go przez liczbę wszystkich pomiarów uzyskuje się **eksperymentalny rozkład prawdopodobieństwa** dla uzyskanych wartości wyników pomiarów, jako jedną z możliwych realizacji rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa.

Rozkład prawdopodobieństwa losowo rozproszonych wyników pomiarów (z błędami przypadkowymi) jest rozkładem ciągłym i zawiera się między rozkładem normalnym $N(\mu_x, \sigma_x)$ (przypadek najkorzystniejszy) a rozkładem równomiernym (przypadek najmniej korzystny).

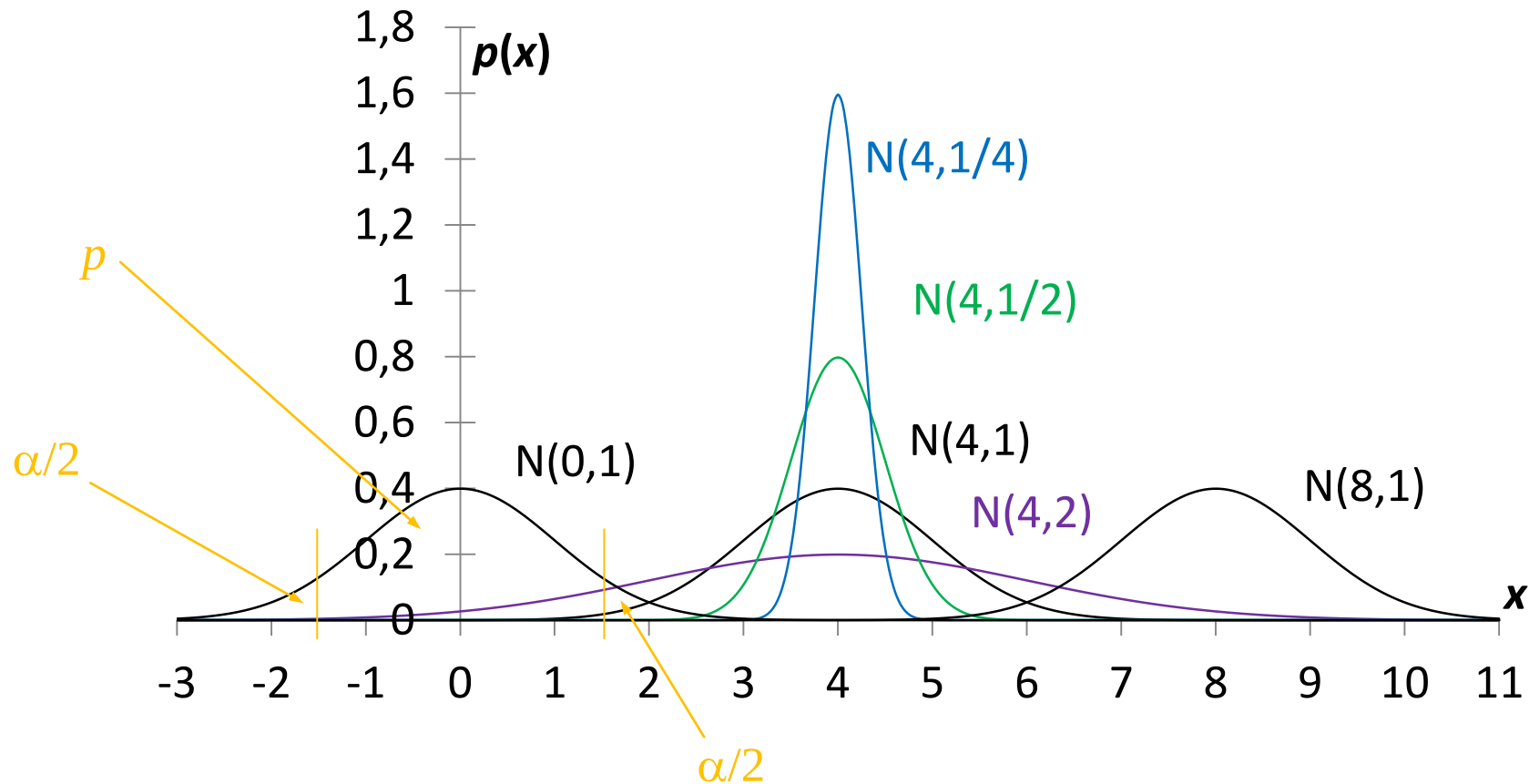
Ze względu na korzystność rozkładu normalnego w praktyce stosuje się właśnie ten rozkład (formalnie powinno to być zbadane sprawdzeniem odpowiedniej hipotezy statystycznej).

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X – funkcja $p(x)$ określająca gęstość prawdopodobieństwa przyjęcia przez zmienną losową X określonych wartości x .

Niektóre rozkłady prawdopodobieństwa są powszechnie znane i stosowane w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej, np. rozkłady:

- dyskretne: Poissona i dwumianowy (Bernoulliego),
- ciągłe: normalny (Gaussa), t -Studenta, χ^2 , wykładniczy, równomierny, jednostajny.

rozkład normalny (Gaussa) $N(\mu, \sigma)$: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ μ – wartość oczekiwana
 σ – odchylenie standardowe



Kwantyl rzędu q zmiennej losowej X : liczba Q_q , dla której prawdopodobieństwo tego, że $X \leq Q_q$ wynosi q . Dla rozkładów symetrycznych względem zera: $-Q_{\frac{\alpha}{2} = \frac{1-p}{2}} = Q_{\frac{\alpha}{2} + p = \frac{1+p}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}}$

Podobne założenie robi się dla samego błędu pomiaru Δx jako zmiennej losowej – jej rozkład prawdopodobieństwa zawiera się między rozkładem normalnym $N(\mu_{\Delta x}, \sigma_{\Delta x})$ z wartością oczekiwaną $\mu_{\Delta x}$ i odchyleniem standardowym $\sigma_{\Delta x} = \sigma_x$ (obserwowany rozrzut wyników pomiarów tej samej (niezmiennej) wartości prawdziwej jest rozrzutem błędów) a rozkładem równomiernym.

μ_x – wartość oczekiwana wyniku pomiaru – różni się od wartości prawdziwej x_0 o wartość stale powtarzanego błędu systematycznego $\Delta_s x$: $\mu_x = x_0 + \Delta_s x$

Wynik pojedynczego i -tego pomiaru jest sumą wartości prawdziwej i towarzyszącego mu błędu całkowitego lub sumą wartości oczekiwanej wyniku pomiaru i błędu przypadkowego tego pomiaru: $x_i = x_0 + \Delta x_i = x_0 + \Delta_s x_i + \Delta_p x_i = \mu_x + \Delta_p x_i$

$\mu_{\Delta x} = \mu_{\Delta_s x} + \mu_{\Delta_p x}$ - prawo dodawania wartości oczekiwanych;

$\mu_{\Delta_s x} \neq 0$ dla wartości stałego, jakiegoś błędu systematycznego,

$\mu_{\Delta_p x} = 0$ dla rozkładu wartości błędu przypadkowego symetrycznego wokół 0.

$\sigma_{\Delta x} = \sqrt{\sigma_{\Delta_s x}^2 + \sigma_{\Delta_p x}^2}$ - prawo dodawania (przenoszenia) wariancji;

$\sigma_{\Delta_s x} = 0$ dla braku zmiany wartości błędu systematycznego,

$\sigma_{\Delta_p x} = \sigma_x \neq 0$ dla obserwowanego rozrzutu wyników pomiarów.

Wynik i błąd pomiaru bezpośredniego

Właściwe jest n -krotne powtórzenie pomiaru tej samej wartości mierzonej wielkości realizowane w takich samych warunkach (kolejno uzyskiwane wartości x_i nie mogą tworzyć rosnącego lub malejącego trendu i nie może wśród nich być wyników odstających) – wynikiem jest

średnia arytmetyczna $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ otrzymanych prawidłowych wartości x_i wyników pomiarów

(dla $n \rightarrow \infty$ wartość średniej arytmetycznej $\bar{x}$ jest asymptotycznie zbieżna do wartości oczekiwanej μ (wartość eksperymentalna (estymator) jest zbieżna do wartości teoretycznej)).

- ▶ wystąpienie trendu kolejnych wyników pomiarów może wynikać z tego, że nie mierzy się tej samej wartości prawdziwej w tych samych warunkach – należy odrzucić wszystkie wyniki;
- ▶ wynik pomiaru wyraźnie odstający od innych może być obarczony błędem grubym – należy go odrzucić;
- ▶ jako wynik prawidłowy należy rozumieć wynik surowy skorygowany poprawkami systematycznymi

Czasem (nie jest to najwłaściwsze) zamiast tą średnią można posługiwać się też:

- średnią wartością rozpiętości serii wyników pomiarów $\frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$,
- wartością modalną (modą, dominantą) serii wyników pomiarów – najczęściej występującą – tą, dla której zaobserwowano największe prawdopodobieństwo wystąpienia,
- medianą serii wyników pomiarów – wartością pomiaru znajdującą się w środku tej serii po uporządkowaniu jej rosnąco.

Uwaga do

► jako wynik prawidłowy należy rozumieć wynik surowy skorygowany poprawkami systematycznymi

Jako wynik pomiaru można też brać średnią wyników surowych skorygowaną o łączną wartość poprawek systematycznych (stałą!):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{sur_i} - ps) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{sur_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ps = \overline{x_{sur}} - \frac{1}{n} n \cdot ps = \overline{x_{sur}} - ps$$

Uwaga do

► wynik pomiaru wyraźnie odstający od innych może być obarczony błędem grubym – należy go odrzucić;

Będzie o tym w dalszej części wykładu.

Każdy z wyników (też skorygowany poprawkami systematycznymi) jest obarczony błędem.

Dla wyznaczonej wartości średniej z serii wyników pomiarów (najlepiej średniej arytmetycznej) oblicza się błąd każdego pojedynczego pomiaru z tej serii pomiarów względem tej średniej wartości (z pewnym statystycznym błędem jest to rzeczywista wartość mierzonej wielkości):

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}.$$

Dla różnych wyników pomiarów błąd ten jest różny. Suma tych błędów dla bardzo wielu wyników pomiaru jest zerem (dla średniej arytmetycznej; dla innych „średnich” może zerem nie być, choć też jest mała). Suma kwadratów tych błędów dla bardzo wielu wyników pomiaru nie jest zerem – miarę błędu opiera się na estymatorze odchylenia standardowego:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Jeżeli wartości wyników pomiarów x_i podlegają rozkładowi normalnemu $N(\mu_x, \sigma_x) \sim N(\bar{x}, s_x)$, to uzyskiwana wartość średniej arytmetycznej $\bar{x}$ jest zmienną losową o rozkładzie

$$N\left(\bar{x}, \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right) \sim N\left(\bar{x}, s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\right).$$

Całkowite błędy pomiaru $\Delta x = \Delta_s x + \Delta_p x = \sum_i \Delta_{sz_i} x + \Delta_{sn} x + \Delta_p x \equiv \sum_i ps_i + \Delta_s x + \Delta_p x$

- błędy systematyczne $\Delta_s x$

- zidentyfikowane $\Delta_{sz} x$ – powinno się obliczać i korygować wynik surowy poprawkami systematycznymi $\Delta_{gsz_i} x \equiv ps_i$ uzyskanymi dla każdego i -tego zidentyfikowanego błędu,
- niezidentyfikowane $\Delta_{sn} x$ – nic o nich nie wiadomo – mogą być **dowolne**, ale dla wykorzystywanego przyrządu pomiarowego zakłada się, że nie przekroczą określonej wartości granicznej $\Delta_{gs} x$,
- błędy przypadkowe $\Delta_p x$ – z ich losowej natury wynika, że mogą być **dowolne**, dla danej uzyskanej próby (obserwowanego rozrzutu wyników) wyznacza się określoną ich wartość graniczną $\Delta_{gp} x$.

Błąd graniczny wyniku pomiaru $\Delta_g x = \Delta_{gs} x + \Delta_{gp} x$

$\Delta_{gs} x$ jest rozumiany jako błąd ze źródeł niezidentyfikowanych – poprawki systematyczne korygują wynik surowy dając wynik poprawiony (tu: prawidłowy)

Dowolność wartości błędu ogranicza się założeniem, że ich wartości mieszczą się z jakimś prawdopodobieństwem $p = 1 - \alpha$ (niekiedy podawanym w %) wewnątrz określonego dla tego prawdopodobieństwa przedziału $[-\Delta_g x, +\Delta_g x]$ (najczęściej symetrycznego wokół zera – braku błędu).

Granice $-\Delta_g x$ i $+\Delta_g x$ to **wartości graniczne błędu pomiaru (błędy graniczne pomiaru)**.

Prawdopodobieństwo p to **poziom ufności**.

Przedział $[-\Delta_g x, +\Delta_g x]$ to **przedział ufności (pokrycia, objęcia)**.

$$P(-\Delta_g x \leq \Delta x_i \leq +\Delta_g x) = \int_{-\Delta_g x}^{\Delta_g x} p(\Delta x) d\Delta x = P\left(Q_{\frac{\alpha}{2} = \frac{1-p}{2}} \leq \Delta x_i \leq Q_{\frac{\alpha}{2} + p = \frac{1+p}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}}\right) \geq 1 - \alpha = p$$

α – prawdopodobieństwo tego, że wartość błędu jest poza przedziałem $[-\Delta_g x, +\Delta_g x]$

$p(\Delta x)$ – gęstość prawdopodobieństwa wartości błędu

Q_q – kwantyl rzędu q rozkładu prawdopodobieństwa błędu pomiaru, dla którego przyjęło się funkcyjną postać $p(\Delta x)$

Błąd graniczny systematyczny $\Delta_{gs}x$ pomiaru ustala się tak, aby stała wartość błędu systematycznego pomiaru $\Delta_s x$ na pewno (z prawdopodobieństwem 1 (lub 100 %)) zawierała się w jego przedziale ufności: $P(-\Delta_{gs}x \leq \Delta_s x \leq +\Delta_{gs}x) = 1$

Najprostszy przypadek – błąd graniczny systematyczny (niezidentyfikowany) pomiaru jest brany jako **błąd dopuszczalny** przyrządu pomiarowego $\Delta_d x$ pracującego w warunkach znamionowych, określany przez producenta tego przyrządu.

Można go też wyznaczyć dla konkretnego eksperymentu pomiarowego na podstawie informacji o przyrządzie (np. rozdzielczości, klasy dokładności) i o otoczeniu pomiaru (wartościach wielkości wpływowych).

Raz wyznaczony dla określonych warunków pomiaru dla przyrządu pomiarowego w stałym stanie technicznym może być traktowany jako stały, powtarzający się przy wykonywaniu różnych pomiarów (jest taki sam dla każdego, nawet pojedynczego aktu posłużenia się tym przyrządem w tych warunkach), a więc jest przypisany do tego przyrządu i do tych warunków pomiaru.

W praktyce bezwzględny **graniczny błąd systematyczny** (niezidentyfikowany) $\Delta_{gs}x$ jest brany:

- dla mechanicznych przyrządów pomiarowych (linijek, metrówek, suwmiarek, śrub mikrometrycznych, czujników zegarowych itp.) oraz przyrządów o odczycie wartości mierzonej wielkości polegającym na odczytaniu pozycji „wskazówki” przyrządu względem jego skali (wskazówkowych zegarków i woltomierzy, termometrów cieczowych, barometrów rtęciowych itp.) jako **wartość pełnej** lub **połowy działki elementarnej** ich skali, odpowiednio do stosowanej rozdzielczości odczytu,
- dla przyrządów pomiarowych analogowych o zakresie pomiarowym (znamionowym) x_{zn} jako ich **błąd dopuszczalny** $\Delta_d x$, wynikający z ich znanej klasy dokładności kl :

$$\Delta_{gs} x = \Delta_d x = \frac{kl}{100} x_{zn}$$

- dla przyrządów pomiarowych cyfrowych jako **kombinacja liniowa zarejestrowanej wartości** x_s (wyniku surowego pojedynczego pomiaru lub średniej arytmetycznej wyników surowych wielu pomiarów) **i wykorzystywanego zakresu pomiarowego** x_{zn} : $\Delta_{gs} x = dx_s + cx_{zn}$

d - **błąd wskazania** (dla większości popularnych mierników uniwersalnych stosowanych w elektronice 0,25 % (0,0025), dla mierników laboratoryjnych 0,05 % (0,0005) lub mniej),

c - **błąd zakresu** (0,01 % (0,0001) lub mniej)

dla konkretnych przyrządów cyfrowych wartości współczynników d i c są podawane przez ich producentów (zależą one m.in. rozdzielczości przetwornika A/C),

cx_{zn} - **błąd cyfrowy** bywa przyjmowany jako wartość pozycji dziesiętnej ostatniej cyfry pokazywanej przez wyświetlacz przyrządu (wynik pomiaru może być większy lub mniejszy o nie mniej niż o wartość tej cyfry);

jeżeli nie zna się wartości współczynników d i c to jako wartość $2\Delta_{gs}x$ można przyjmować wartość jego „działki elementarnej” - **błąd kwantowania** - najmniejszą wartość, o jaką może się zmieniać wyświetlany wynik pomiaru (nie musi to być wartość pozycji dziesiętnej ostatniej wyświetlanej cyfry – wyświetlany wynik może się zmieniać z określonym krokiem (rozdzielczością) większym od wartości pozycji dziesiętnej ostatniej wyświetlanej cyfry).

Błąd graniczny przypadkowy (rozszerzony) $\Delta_{gp}x$ pomiaru ustala się tak, aby dana wartość błędu przypadkowego pomiaru $\Delta_p x_i$ zawierała się w jego przedziale ufności z prawdopodobieństwem $p = 1 - \alpha$ mniejszym od 1 (lub od 100 %): $P(-\Delta_{gp}x \leq \Delta_p x_i \leq +\Delta_{gp}x) \geq 1 - \alpha = p$

Wiąże się go z odchyleniem standardowym teoretycznym σ_x lub empirycznym s_x wyniku jako w założeniu zmiennej losowej o rozkładzie normalnym:

- dla pojedynczego pomiaru:

$$\Delta_{gp}x = \begin{cases} k_\alpha \sigma_x & \text{gdy } \sigma_x \text{ jest znane} \\ 0 & \text{gdy } \sigma_x \text{ nie jest znane i jednocześnie nie można obliczyć } s_x \end{cases}$$

- dla wyniku pomiaru jako średniej arytmetycznej n wyników pomiarów wielokrotnych:

$$\Delta_{gp}x = \begin{cases} k_\alpha \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = k_\alpha \sigma_{\bar{x}} & \text{gdy } \sigma_x \text{ jest znane} \\ t_{\alpha v} \frac{s_x}{\sqrt{n}} = t_{\alpha v} s_{\bar{x}} & \text{gdy } \sigma_x \text{ nie jest znane, ale na podstawie znanych wyników można} \end{cases}$$

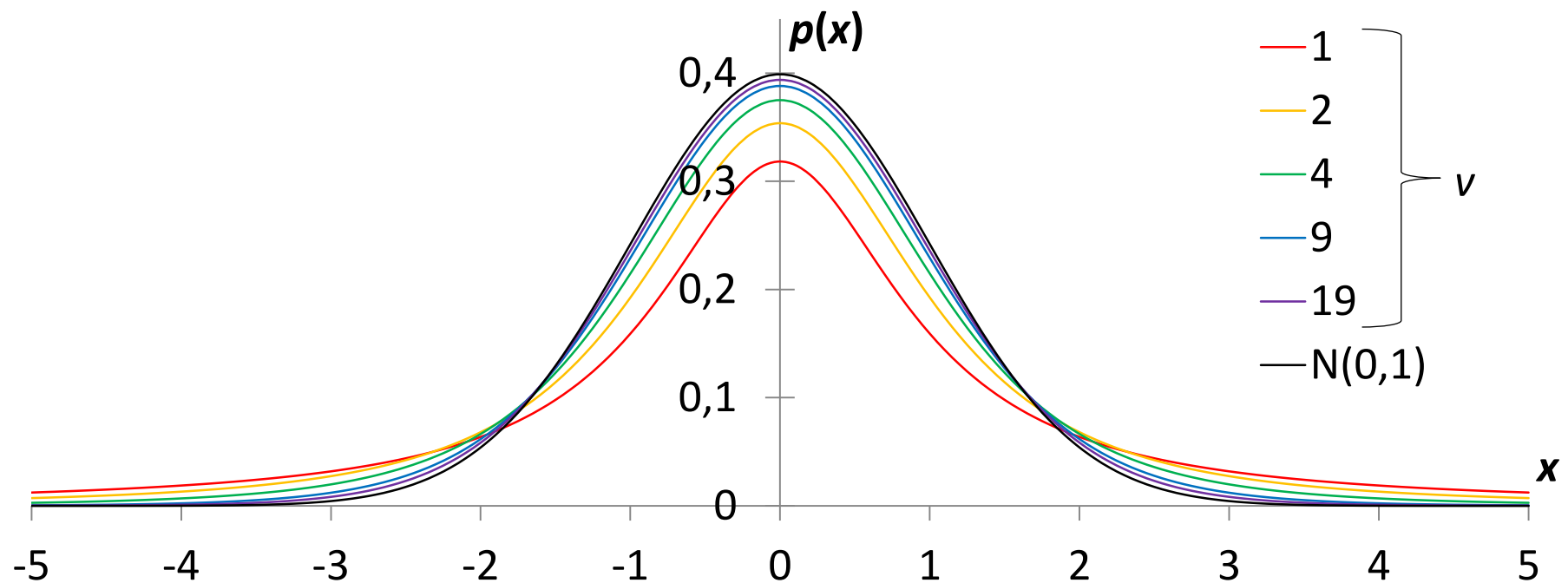
obliczyć $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

k_α - kwantyl rzędu $\frac{\alpha}{2} + p = 1 - \frac{\alpha}{2}$ rozkładu normalnego $N(0,1)$
 $t_{\alpha v}$ - t -Studenta o $v = n - 1$ stopniach swobody

dla $n > 20$ zamiast wartości $t_{\alpha v}$ można stosować wartości k_α

rozkład t -Studenta:
$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

$\Gamma(a)$ – funkcja gamma (dla $a > 0$: $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$)



Kwantyle rzędu $1 - \alpha/2$ rozkładu t -Studenta (współczynniki rozszerzenia) $t_{\alpha v}$
dla $v = n - 1$ stopni swobody (n powtórzeń pomiaru)
i prawdopodobieństwa $\alpha = 1 - p$ (poziomu ufności p) dostępne w MS Excel

liczba stopni swobody v	poziom ufności p					
	0,682689	0,9	0,95	0,954500	0,99	0,997300
1	1,837337	6,313752	12,706205	13,967730	63,656741	235,801498
4	1,141627	2,131847	2,776445	2,869309	4,604095	6,620206
9	1,058728	1,833113	2,262157	2,319806	3,249836	4,094255
14	1,037013	1,761310	2,144787	2,195288	2,976843	3,635801
19	1,027017	1,729133	2,093024	2,140494	2,860935	3,447233
29	1,017541	1,699127	2,045230	2,089968	2,756386	3,280426
49	1,010309	1,676551	2,009575	2,052321	2,679952	3,160509
99	1,005076	1,660391	1,984217	2,025568	2,626405	3,077549
999	1,000501	1,646380	1,962341	2,002505	2,580760	3,007525
9999	1,000050	1,645006	1,960201	2,000250	2,576321	3,000750
	1	1,644854	1,959964	2	2,575829	3

kwantyle k_α rozkładu $N(0,1)$ rzędu $1 - \alpha/2$ dla prawdopodobieństwa α

- wartości $t_{\alpha v}$ dla coraz większych v zbliżają się do wartości k_α ($t_{\alpha v}$ stosuje się dla $n < 20$)
- dla większości realnie występujących przypadków wyznaczania przedziału ufności ($p = 0,95$), k_α i $t_{\alpha v}$ można zaokrąglić do liczby 2 (sugestia upraszczania spotykana w literaturze)

Błąd graniczny przypadkowy jest wyznaczany na podstawie uzyskanych wartości konkretnego eksperymentu pomiarowego – dla każdego takiego eksperymentu należy powtórzyć jego wyznaczenie.

Jest związany z wykorzystaniem przyrządu pomiarowego w danej chwili i w danych warunkach pomiarowych.

To samo w odniesieniu do wyniku pomiaru (powyżej było dla błędów):

Wartości graniczne błędów wyznacza się tak, aby wartość prawdziwa x_0 mierzonej wielkości znajdowała się wewnątrz pewnego przedziału (**przedziału ufności**) określonego dla wartości zarejestrowanej $\bar{x}$ i granicznej błędu $\Delta_g x$ z założonym prawdopodobieństwem (**poziomem ufności**) $p = 1 - \alpha$ (tu: mniejszym, brany przy wyznaczaniu błędu granicznego przypadkowego):

$$P(\bar{x} - \Delta_g x \leq x_0 \leq \bar{x} + \Delta_g x) \geq 1 - \alpha = p; \quad \Delta_g x = \Delta_{gs} x + \Delta_{gp} x$$

Można też zapisać: $x_0 = \bar{x} \pm \Delta_g x$ dla założonego poziomu ufności.

Im większa jest przyjęta wartość poziomu ufności, tym szerszy jest przedział ufności. W praktyce wybiera się go na poziomie od 0,9 do 0,99, najczęściej jako 0,95. Dla $p = 1$ (lub 100 %) przedział ufności jest nieskończenie szeroki i za prawdziwy może być uznany dowolny wynik pomiaru.

Przyjęcie konkretnej wartości poziomu ufności jest kompromisem pomiędzy uzyskaniem przedziału bezpiecznego, tj. takiego, żeby wartość prawdziwa mogła się w nim znajdować, i przedziału realistycznego, tj. nie nadmiernie szerokiego.

Wyniki odstające (obarczone błędem grubym)

Stosowanie testów statystycznych do decydowania o odstawianiu wyniku pojedynczego pomiaru od pozostałych w serii pomiarów wielokrotnych dla zadanego prawdopodobieństwa – testy Q-Dixona, Grubbsa, Chauveneta, Doerffela-Grafa, Tukeya i inne. W ostateczności reguła „trzech sigm” dla wyniku pojedynczego pomiaru w serii pomiarów wielokrotnych.

Jeżeli wartości pomiarów podlegają rozkładowi normalnemu $N(\mu, \sigma)$, to pojedyncze wyniki x_i

- leżące poza przedziałem $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ pojawiają się raz na 3 obserwacje (ściślej 3,151),
- leżące poza przedziałem $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ pojawiają się raz na 22 obserwacje (ściślej 21,978),
- leżące poza przedziałem $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ pojawiają się raz na 370 obserwacji (ściślej 370,398).

Prawdopodobieństwa przypadków, że zmierzona (zarejestrowana, stwierdzona) wartość różniąc się od wartości oczekiwanej μ (prawdziwej x_0) o więcej niż $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$ i $\pm 3\sigma$ jest poprawna, wynoszą odpowiednio $\alpha = 0,317311$, $0,045500$ i $0,002700$.

Reguła „trzech sigm” dla wyniku pojedynczego pomiaru w serii pomiarów wielokrotnych: dla danej serii pomiarów wykonywanych w tych samych warunkach prawdopodobieństwo tego, że wyniki tych pomiarów nie leżą w przedziale $[\bar{x} - 3s_x, \bar{x} + 3s_x]$ wynosi $0,002700$ i jako tak małe jest podstawą do ich odrzucenia jako „nieprawdopodobnych” (obarczonych błędem grubym).

Reguła „trzech sigm” dla wartości średniej serii pomiarów: prawdopodobieństwo tego, że wartość prawdziwa x_0 (znana np. ze źródeł fachowych) nie leży w przedziale $[\bar{x} - 3s_{\bar{x}}, \bar{x} + 3s_{\bar{x}}]$, określonym dla danej serii pomiarów wykonywanych w tych samych warunkach, wynosi $0,002700$ i jako tak małe jest podstawą do odrzucenia uzyskanej wartości średniej jako „nieprawdopodobnej” (uznania eksperymentu za przeprowadzony nieprawidłowo).

Przypadek wykonywania kilku (m) serii pomiarów wielokrotnych tej samej wartości wielkości mierzonej wykonywanych w potencjalnie tych samych warunkach, z których każda zawiera po n_j wartości.

Dla każdej j -tej serii istnieje μ_{x_j} i $\sigma_{x_j}^2$, estymowane odpowiednio przez $\bar{x}_j$ i $s_{x_j}^2$.

Wspólna dla wszystkich pomiarów wartość oczekiwana wyniku pomiaru μ_x jest estymowana przez średnią średnich: $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{x}_j = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)$.

Wspólna dla wszystkich pomiarów wariancja wyniku pomiaru (błędu przypadkowego) zgodnie z prawem dodawania wariancji wynosi $\sigma_x^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_{x_j}^2 = \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_{x_j}^2}{n_j}$ i jest estymowana przez

$$s_x^2 = \sum_{j=1}^m s_{x_j}^2 = \sum_{j=1}^m \frac{s_{x_j}^2}{n_j} \quad \text{dla liczby stopni swobody wyznaczania tego estymatora } v = \frac{s_x^4}{\sum_{j=1}^m \frac{s_{x_j}^4}{v_j}} \leq \sum_{j=1}^m v_j$$

(wzór Welcha-Satterthwaite'a; jeśli v nie jest liczbą całkowitą zaokrągla się ją w dół do najbliższej liczby całkowitej; $v_j = n_j - 1$).

Dopuszcza się możliwość przyjmowania przez **błąd systematyczny** $\Delta_s x_j$ w każdej j -tej z m serii dowolnej wartości z przyjętego przedziału $[-\Delta_{gs}x, +\Delta_{gs}x] \rightarrow \Delta_s x$ jest zmienną losową o pewnej wartości oczekiwanej $\mu_{\Delta_s x}$ i wariancji $\sigma_{\Delta_s x}^2$ (odchyleniu standardowym $\sigma_{\Delta_s x}$), a prawdopodobieństwo wystąpienia konkretnych wartości tego błędu jest opisane jakimś przyjętym rozkładem prawdopodobieństwa $p(\Delta_s x)$ o znanej postaci (liczy się wartości teoretyczne tych parametrów ze wzorów definicyjnych (tych z całkami)).

Błędy przypadkowe wyników z każdej serii mają takie same charakterystyki probabilistyczne i prawdopodobieństwo ich wystąpienia można modelować rozkładem normalnym, tak jak dla pojedynczej serii, otrzymując odpowiednie przedziały ufności.

Rozważane rozkłady prawdopodobieństwa wartości **błędu systematycznego**

- **prostokątny** – w przedziale $[-\Delta_{gs}x, +\Delta_{gs}x]$ prawdopodobieństwo wystąpienia błędu jest stałe niezerowe, poza tym przedziałem prawdopodobieństwo to ma wartość równą zero; $\mu_{\Delta_s x} = 0$,

$$\sigma_{\Delta_s x}^2 = \frac{\Delta_{gs}^2 x}{3}$$

- **trójkątny** – w przedziale $[-\Delta_{gs}x, +\Delta_{gs}x]$ prawdopodobieństwo wystąpienia błędu liniowo rośnie i maleje wokół wartości maksymalnej występującej dla wartości błędu leżącej wewnątrz tego przedziału, poza tym przedziałem prawdopodobieństwo to ma wartość równą zero; dla rozkładu symetrycznego (równoramiennego) $\mu_{\Delta_s x} = 0$, $\sigma_{\Delta_s x}^2 = \frac{\Delta_{gs}^2 x}{6}$

- **trapezowy** – w przedziale $[-\Delta_{gs}x', +\Delta_{gs}x']$ prawdopodobieństwo wystąpienia błędu jest stałe niezerowe, poza granicami tego przedziału prawdopodobieństwa wystąpienia błędu spadają do zera prostymi o określonych skończonych współczynnikach kierunkowych wyznaczając przedział $[-\Delta_{gs}x, +\Delta_{gs}x]$ o niezerowym prawdopodobieństwie, przedział $[-\Delta_{gs}x', +\Delta_{gs}x']$ jest β -krotnie krótszy od przedziału $[-\Delta_{gs}x, +\Delta_{gs}x]$; dla rozkładu symetrycznego (równoramiennego) $\mu_{\Delta_s x} = 0$, $\sigma_{\Delta_s x}^2 = \frac{1 + \beta^2}{6} \Delta_{gs}^2 x$ (prostokątny dla $\beta = 1$, trójkątny dla $\beta = 0$)

- **normalny** $N(0, \sigma_{\Delta_s x})$ – prawdopodobieństwo $p = 1 - \alpha$ znajdowania się wartości błędu w przedziale $[-\Delta_{gs} x, +\Delta_{gs} x] = [-k_\alpha \sigma_{\Delta_s x}, +k_\alpha \sigma_{\Delta_s x}]$ jest znane i wartości te mają rozkład

w przybliżeniu normalny; $\mu_{\Delta_s x} = 0$, $\sigma_{\Delta_s x} = \frac{\Delta_{gs} x}{k_\alpha}$

– dla $p = 0,9973$: $\sigma_{\Delta_s x} = \frac{\Delta_{gs} x}{3}$,

– dla $p = 0,9545$: $\sigma_{\Delta_s x} = \frac{\Delta_{gs} x}{2}$,

– dla $p = 0,682689$: $\sigma_{\Delta_s x} = \Delta_{gs} x$

– dla $p = 0,5$: $\sigma_{\Delta_s x} = \frac{\Delta_{gs} x}{\kappa_{3/4}} = \frac{\Delta_{gs} x}{0,674490}$

($\kappa_{3/4} = 0,674490$ - górny kwartyl (kwantyl rzędu 0,75) rozkładu $N(0,1)$)

- **w kształcie litery U** – w przedziale $[-\Delta_{gs} x, +\Delta_{gs} x]$ prawdopodobieństwo wystąpienia błędu jest największe dla granic tego przedziału, poza tym przedziałem prawdopodobieństwo to ma wartość równą zero; w skrajnym przypadku niezerowe prawdopodobieństwa występują tylko dla wartości $-\Delta_{gs} x$ i $+\Delta_{gs} x$; dla rozkładu symetrycznego (o takich samych prawdopodobień-

stwach wystąpienia wartości $-\Delta_{gs} x$ i $+\Delta_{gs} x$) $\mu_{\Delta_s x} = 0$, $\sigma_{\Delta_s x}^2 = \frac{\Delta_{gs}^2 x}{2}$

$\sigma_{\Delta_s x}^2 = f(\Delta_{gs} x)$ jest wyznaczane dla liczby stopni swobody $v_{\Delta_s x}$:

- jeśli przedział $[-\Delta_{gs} x, +\Delta_{gs} x]$ przyjęto tak, że zawiera wszystkie możliwe wartości $\Delta_s x_j$ i że znany jest rozkład prawdopodobieństwa $p(\Delta_s x)$, to $v_{\Delta_s x} = \infty$

- jeśli przyjęta wartość $\Delta_{gs} x$ jest obarczona swoim błędem $\Delta_g(\Delta_{gs} x) > 0$ to

$$v_{\Delta_s x} \approx \frac{1}{2 \left(\frac{\Delta_g(\Delta_{gs} x)}{\Delta_{gs} x} \right)^2} = \frac{1}{2 \delta_g^2(\Delta_{gs} x)}; \text{ względny błąd błędu granicznego}$$

systematycznego przyrządu pomiarowego $\delta_g^2(\Delta_{gs} x)$ bywa podawany przez jego producenta

Błąd graniczny wyników wielokrotnych pomiarów tej samej wartości mierzonej wielkości wykonywanych w tych samych warunkach w m seriach po n_j pomiarów, wyznaczany dla poziomu ufności $p = 1 - \alpha$:

$$\Delta_{g\ x} = \begin{cases} k_{\alpha} \sqrt{\sigma_{\Delta_s x}^2 + \sigma_x^2} & \text{gdy } \sigma_x^2 \text{ jest znana} \\ k_{\alpha} \sqrt{\sigma_{\Delta_s x}^2 + s_x^2} & \text{gdy } \sigma_x^2 \text{ nie jest znana, ale spełnione są warunki centralnego twierdzenia granicznego i można obliczyć } s_x^2 \\ t_{\alpha v} \sqrt{\sigma_{\Delta_s x}^2 + s_x^2} & \text{gdy } \sigma_x^2 \text{ nie jest znana, ale można obliczyć } s_x^2 \end{cases}$$

$\sigma_{\Delta_s x}^2 = f(\Delta_{gs\ x})$; $\Delta_{gs\ x}$ - określony dla przyrządu pomiarowego

σ_x^2 i s_x^2 - wariancje teoretyczna i eksperymentalna błędu przypadkowego wyniku pomiaru jako średniej arytmetycznej

k_{α} - kwantyl rzędu $\frac{\alpha}{2} + p = 1 - \frac{\alpha}{2}$ rozkładu

normalnego $N(0,1)$

t -Studenta o $v_{ef} = \frac{s_x^4}{\frac{\sigma_{\Delta_s x}^4}{v_{\Delta_s x}} + \sum_{j=1}^m \frac{s_{xj}^4}{v_j}}$ stopniach swobody

jeśli v_{ef} nie jest liczbą całkowitą zaokrągla się ją w dół do najbliższej liczby całkowitej;

$$v_j = n_j - 1$$

Centralne twierdzenie graniczne

Jeżeli zmienna losowa Y jest kombinacją liniową zmiennych losowych X_i : $Y = \sum_{i=1}^m a_i X_i$ i wszystkie X_i mają rozkłady normalne $N(\mu_{x_i}, \sigma_{x_i})$, to Y ma rozkład normalny $N(\mu_y, \sigma_y)$,
 $\mu_y = \sum_{i=1}^m a_i \mu_{x_i}$, $\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2 \sigma_{x_i}^2$, a jeżeli X_i nie mają rozkładów normalnych, ale są niezależne i $\sigma_y^2 \gg \sigma_{x_i}^2$, to Y można aproksymować rozkładem normalnym $N(\mu_y, \sigma_y)$.

Konsekwencja: dla błędu granicznego będącego sumą błędu granicznego systematycznego (o rozkładzie niekoniecznie przyjmowanym za normalny (np. za prostokątny)) i błędów granicznych przypadkowych dla każdej serii pomiarów (o rozkładach normalnych), gdy odchylenia standardowe wszystkich błędów są w miarę zbliżone (żadne nie jest wyraźnie większe od pozostałych), to można korzystać z kwantyli rozkładu normalnego (nie trzeba wyznaczać efektywnej liczby stopni swobody dla rozkładu t -Studenta).

Propagacja błędów w pomiarach pośrednich – wynik i błąd pomiaru pośredniego

Poszukiwana wielkość „mierzona” (wyjściowa) y jest wyznaczana na podstawie m innych wielkości realnie mierzonych lub o wartościach przyjętych jako stałe (wejściowych) x_i :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

np. wyznaczana jest wartość prędkości średniej v na podstawie pomiarów długości drogi s i czasu przejazdu t : $v = f(s, t) = s/t = st^{-1}$

Każda z wartości x_i jest wyznaczana dla n_i wartości x_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n_i$) wyników wielokrotnych pomiarów tych samych wartości mierzonych wielkości wykonywanych w tych samych warunkach jako $x_{0i} = x_{i, pop} \pm (\Delta_{gs}x_i + \Delta_{gp}x_i)$, przy czym dla każdej wielkości błąd:

– systematyczny $\Delta_s x_i \in [-\Delta_{gs}x_i, +\Delta_{gs}x_i]$,

– przypadkowy $\Delta_p x_i$ ma rozkład $N(0, \sigma_{\Delta_p x_i})$ - błędy przypadkowe wszystkich wielkości wejściowych tworzą m -wymiarową zmienną losową o łącznym rozkładzie normalnym o **wariancjach** $\sigma_{\Delta_p x_i}^2 = \sigma_{x_i}^2$ i **kowariancjach** $\sigma_{\Delta_p x_i, \Delta_p x_j} = \sigma_{x_i, x_j}$ (gdy $\sigma_{x_i, x_j} \neq 0$ to wielkości x_i i x_j są **skorelowane**, a gdy $\sigma_{x_i, x_j} = 0$ to wielkości x_i i x_j są **nieskorelowane**).

Wariancje $\sigma_{x_i}^2$ są estymowane przez $s_{x_i}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x}_i)^2$.

Kowariancje σ_{x_i, x_j} są estymowane przez $s_{x_i, x_j} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)$

– wyrażenie wymagające **tej samej** liczby wartości wielkości x_i i x_j ($n_i = n_j \equiv n$).

Odpowiednio, wszystkie wartości $\bar{x}_i$ tworzą m -wymiarową zmienną losową łącznym rozkładzie normalnym o wariancjach $\sigma_{x_i}^2 = \frac{\sigma_{x_i}^2}{n}$ i kowariancjach $\sigma_{\bar{x}_i, \bar{x}_j} = \frac{\sigma_{x_i, x_j}}{n}$ estymowanych odpo-

wiednio przez $s_{x_i}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x}_i)^2$ i $s_{\bar{x}_i, \bar{x}_j} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)$.

Korelacja wielkości x_i i x_j nie dotyczy wielkości fizycznych występujących w zależności $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, ale **wyników pomiarów** (realizacji zmiennych losowych).

Brak korelacji wielkości x_i i x_j oznacza, że obie mają niezależne, **oddzielne realizacje**.

Skorelowanie wielkości x_i i x_j może np. wynikać z ich jednoczesnego mierzenia albo z mierzenia tym samym przyrządem pomiarowym.

Kowariancje - wartości wymiarowe (wyrażane w jednostkach będących iloczynami jednostek miar wielkości, których korelację się wyznacza) - mogą przyjmować różne wartości ujemne i dodatnie dla różnych zestawów sprawdzanych liczb - wartość kowariancji nie wyraża bezpośrednio stopnia skorelowania wartości wielkości wejściowych (tak samo skorelowane zestawy liczb mogą dawać różne wartości wariancji, te same wartości wariancji można otrzymać dla różnie skorelowanych zestawów liczb).

Przy ocenie skorelowania wartości wejściowych lepiej posługiwać się bezwymiarowym **współczynnikiem korelacji** - kowariancją wartości wielkości wejściowych unormowaną do ich

odchyłeń standardowych: $\rho(x_i, x_j) = \frac{\sigma_{x_i, x_j}}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}} = \frac{\sigma_{\bar{x}_i, \bar{x}_j}}{\sigma_{\bar{x}_i} \sigma_{\bar{x}_j}} = \rho(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$, estymowanym przez

$$r(x_i, x_j) = \frac{s_{x_i, x_j}}{s_{x_i} s_{x_j}} = \frac{s_{\bar{x}_i, \bar{x}_j}}{s_{\bar{x}_i} s_{\bar{x}_j}} = r(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{i,k} - \bar{x}_i)(x_{j,k} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{i,k} - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{j,k} - \bar{x}_j)^2}}$$

Wartość współczynnika korelacji przyjmuje wartości z przedziału $[-1, +1]$:

dla wielkości nieskorelowanych jest zerem,

dla wielkości słabo skorelowanych jest bliska zeru,

dla wartości silnie skorelowanych jest bliska +1 lub -1,

dla wartości w pełni skorelowanych jest równa +1 lub -1

plus, gdy zależność $x_j(x_i)$

jest rosnąca,

minus – gdy jest malejąca

Wyznaczana wartość wielkości y ma swoją wartość prawdziwą y_0 i jest obliczana jako:

- funkcja średnich arytmetycznych wartości x_i :

$$y = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_m}), \quad \overline{x_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}, \text{ co można zrobić zawsze,}$$

- średnia arytmetyczna wartości funkcji f_k obliczonych dla kolejnych pomiarów:

$$y = \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}), \text{ co można robić tylko wtedy,}$$

gdy wszystkie wielkości x_i zmierzono dokładnie tyle samo razy: $n_1 = n_2 = \dots = n_m \equiv n$,

i jest obarczona swoim stałym błędem systematycznym $\Delta_s y$ i losowo zmieniającym się błędem przypadkowym $\Delta_p y$, przy czym oba te błędy występują niezależne i należy wyznaczyć je oddzielnie na podstawie błędów Δx_i wielkości $x_1, x_2, \dots$ i x_m i dla obu wyznaczyć wartości graniczne wyznaczające przedział ufności i pozwalające na zapis $y \pm \Delta_y$.

Jeżeli funkcja f jest funkcją liniową, to oba sposoby obliczania wartości y dają jednakowe wyniki. Jeżeli funkcja f jest nieliniowa, lepszym sposobem obliczania wartości y jest sposób drugi.

Dodatkowo, sposób drugi bezpośrednio prowadzi do definiowania estymatorów jej odchylenia standardowego s_y i odchylenia standardowego średniej arytmetycznej $s_{\overline{y}}$ jako:

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2} \quad \text{ i } s_{\overline{y}} = \frac{s_y}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2}.$$

Błąd graniczny systematyczny $\Delta_{gs}y$ - metoda najgorszego rozłożenia wyrazów różniczki zupełnej pierwszego rzędu wielkości $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ (najczęściej stosowana):

$$\Delta_{gs} y = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta_{gs} x_i \right|.$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial y}{\partial x_i} \equiv y_{x_i}^I \equiv c_i$ - **współczynniki wrażliwości** wielkości y na wielkość x_i -

- opisują jak zmiany wartości wielkości x_i wpływają na zmianę wartości wielkości y .

Dla iloczynowej postaci zależności $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = a \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i}$:

$$\Delta_{gs} y = \sum_{i=1}^m \left| a \alpha_i \frac{x_i^{\alpha_i}}{x_i} \Delta_{gs} x_i \prod_{j \neq i} x_j^{\alpha_j} \right| = \sum_{i=1}^m \left| \alpha_i y \frac{\Delta_{gs} x_i}{x_i} \right| = |y| \sum_{i=1}^m \left| \alpha_i \frac{\Delta_{gs} x_i}{x_i} \right| \quad \text{ i } \quad \delta_{gs} y = \frac{\Delta_{gs} y}{|y|} = \sum_{i=1}^m \left| \alpha_i \cdot \delta_{gs} x_i \right|$$

np. dla prędkości v : $\delta_{gs} v = \frac{\Delta_{gs} v}{|v|} = \left| \frac{v_s^I \Delta_{gs} s}{v} \right| + \left| \frac{v_t^I \Delta_{gs} t}{v} \right| = \left| \frac{\left(\frac{s}{t}\right)^I \Delta_{gs} s}{\frac{s}{t}} \right| + \left| \frac{\left(\frac{s}{t}\right)^I \Delta_{gs} t}{\frac{s}{t}} \right| = \left| \frac{1}{t} \Delta_{gs} s \right| + \left| \frac{-\frac{s}{t^2} \Delta_{gs} t}{\frac{s}{t}} \right| =$

$$= \left| \frac{\Delta_{gs} s}{s} \right| + \left| -\frac{\Delta_{gs} t}{t} \right| = |\delta_{gs} s| + |-\delta_{gs} t| = \delta_{gs} s + \delta_{gs} t$$

Błąd graniczny przypadkowy $\Delta_{gp}y$ wyniku pomiaru jako odpowiedniej średniej dla przyjętego poziomu ufności $p = 1 - \alpha$ jest związany z wariancją

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i c_j \sigma_{x_i, x_j} = \sum_{i=1}^m c_i^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m c_i c_j \sigma_{x_i, x_j}$$

$$\text{estymowaną przez } s_y^2 = \sum_{i=1}^m c_i^2 s_{x_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m c_i c_j s_{x_i, x_j}$$

$$\Delta_{gp} y = \begin{cases} k_{\alpha} \sigma_y^- & \text{gdy } \sigma_y^- \text{ jest znane} \\ k_{\alpha} s_y^- & \text{gdy } \sigma_y^- \text{ nie jest znane, ale można obliczyć } s_y^- \text{ i spełnione są warunki} \\ t_{\alpha v} s_y^- & \text{gdy } \sigma_y^- \text{ nie jest znane, ale można obliczyć } s_y^- \end{cases}$$

centralnego twierdzenia granicznego

σ_y^- i s_y^- - odchylenia standardowe teoretyczne i eksperymentalne błędu przypadkowego wyniku pomiaru jako średniej arytmetycznej (dodatnie pierwiastki kwadratowe wariancji)

$$\begin{aligned} k_{\alpha} & \text{ - kwantyl rzędu } \frac{\alpha}{2} + p = 1 - \frac{\alpha}{2} \text{ rozkładu normalnego } N(0,1) \\ t_{\alpha v} & \text{ - } t\text{-Studenta o } v_y = \frac{s_y^4}{\sum_{i=1}^m \frac{s_{x_i}^4}{v_i}} \text{ stopniach swobody;} \end{aligned}$$

jeśli v_y nie jest liczbą całkowitą zaokrągla się ją w dół do najbliższej liczby całkowitej;

$v_i = n_i - 1$ - stopnie swobody związane z wielkością wejściową x_i

Stosując współczynnik korelacji, wariancję $\sigma_{\frac{2}{y}} = \sum_{i=1}^m c_i^2 \sigma_{\frac{2}{x_i}}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m c_i c_j \sigma_{\frac{2}{x_i}} \sigma_{\frac{2}{x_j}}$

estymowaną przez $s_{\frac{2}{y}} = \sum_{i=1}^m c_i^2 s_{\frac{2}{x_i}}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m c_i c_j s_{\frac{2}{x_i}} s_{\frac{2}{x_j}}$

zapisuje się jako wariancję $\sigma_{\frac{2}{y}} = \sum_{i=1}^m c_i^2 \sigma_{\frac{2}{x_i}}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m c_i c_j \sigma_{\frac{2}{x_i}} \sigma_{\frac{2}{x_j}} \rho_{\frac{2}{x_i}, \frac{2}{x_j}}$

estymowaną przez $s_{\frac{2}{y}} = \sum_{i=1}^m c_i^2 s_{\frac{2}{x_i}}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m c_i c_j s_{\frac{2}{x_i}} s_{\frac{2}{x_j}} r_{\frac{2}{x_i}, \frac{2}{x_j}}$

np. dla prędkości v i braku skorelowania pomiarów drogi s i czasu t ($r(s, t) = 0$):

$$s_v^- = \sqrt{\left(v_s^I\right)^2 s_s^2 + \left(v_t^I\right)^2 s_t^2} = \sqrt{\left(\left(\frac{s}{t}\right)_s^I\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^{n_s} (s_i - \bar{s})^2}{n_s(n_s - 1)} + \left(\left(\frac{s}{t}\right)_t^I\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^{n_t} (t_i - \bar{t})^2}{n_t(n_t - 1)}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^{n_s} (s_i - \bar{s})^2}{n_s(n_s - 1)} + \left(-\frac{s}{t^2}\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^{n_t} (t_i - \bar{t})^2}{n_t(n_t - 1)}} = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_s} (s_i - \bar{s})^2}{n_s(n_s - 1)} + \left(\frac{s}{t} = v\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^{n_t} (t_i - \bar{t})^2}{n_t(n_t - 1)}}$$

Niespełnienie wymogu tej samej liczby wyników pomiarów wszystkich wielkości wejściowych x_i skutkuje:

- możliwością wyznaczenia wartości wielkości wyjściowej tylko z zależności $y = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_m})$,
- brakiem możliwości eksperymentalnego sprawdzenia wzajemnego skorelowania wielkości wejściowych – **przyjmuje się je arbitralnie za nieskorelowane** i wartość eksperymentalnego odchylenia standardowego średniej arytmetycznej wartości wielkości wyjściowej oblicza się tylko na podstawie wartości odchylen standardowych (wariancji) średnich arytmetycznych wartości wielkości wejściowych,
- koniecznością wyznaczania liczby stopni swobody v_y wyznaczania estymatora wariancji wielkości wyjściowej z pokazanej ogólnej postaci wzoru Welcha-Satterthwaite'a, uwzględniającej różne liczby stopni swobody $v_i = n_i - 1$ wyznaczania estymatorów wariancji wielkości wejściowych – dla tej samej liczby pomiarów każdej wielkości wejściowej i zachodzi

$$v_y = v \frac{s_y^4}{\sum_{i=1}^m s_{x_i}^4}.$$

Uwaga: przypadek wyznaczania wartości wielkości wyjściowej na podstawie wartości wielkości wejściowych uzyskiwanych w kilku seriach – odsyłam do literatury lub zapraszam na konsultacje.

Współczesne podejście zalecane przez OIML do wyznaczania „**jakości**” **wyniku pomiaru** jest **odejściem od określania błędu** (złożonego niejako oddzielnie z błędu systematycznego i przypadkowego) co wymaga znajomości mezurandu (prawdziwej wartości wielkości mierzonej) **w stronę określania** wątpliwości w uzyskaną wartość (czyli **niepewności**) **wyniku pomiaru** bez potrzeby znajomości tego mezurandu, bo tylko na podstawie zarejestrowanych wartości i informacji o procedurze pomiarowej, np. o zastosowanym przyrządzie pomiarowym i o warunkach pomiaru.

Określenie niepewności pomiaru powinno uwzględnić wszelkie możliwe do wyrażenia liczbowego przyczyny wątpliwości w prawdziwość wyniku pomiaru (źródła niepewności), niezależnie od ich charakteru (zdeteminowania, losowości, percepcji człowieka, wpływu otoczenia itd.).

Niepewność u (ang. *uncertainty*) wyniku pomiaru – iloczyn liczby i jednostki miary mierzonej wielkości (podobnym iloczynem jest też błąd bezwzględny Δ).

„Evaluation of measurement data. Guide to the expression of **uncertainty** in **measurement**” (dokument GUM) - zasady wyznaczania niepewności opracowane przez wspólny komitet (*Joint Committee for Guides in Metrology* (JCGM)) siedmiu międzynarodowych organizacji zajmujących się standaryzacją w różnych dziedzinach nauki: OIML, BIPM, ISO, IEC, IUPAP, IUPAC i IFCC – patrz pierwszy wykład.

- strona internetowa OIML, zakładki:

publications – guides – G 1-100-en – aktualna wersja przewodnika z 2008 r. będącego wersją z 1995 r. z małymi zmianami,
publications – guides – G 1-104-en – wstęp do przewodnika z 2009 r.

- strona internetowa BIPM, zakładka *publications/réunions – guides en métrologie*, ang. *publications & events – guides in metrology*

- strona internetowa <https://www.iso.org/iso-guides.html>, zakładka *publicly available iso/iec guides*.

Polskie tłumaczenia dokumentu GUM przez pracowników polskiego urzędu GUM:

2019 r.: „Ewaluacja danych pomiarowych. Przewodnik wyrażania niepewności pomiaru”, strona internetowa urzędu GUM, zakładki: *transfer wiedzy – publikacje – niepewność pomiaru – dokumenty tłumaczone* oraz *transfer wiedzy – publikacje – publikacje z 2019 r.*

1999 r.: „Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik” (tylko wydanie papierowe; krótki opis: strona internetowa bip GUM, zakładka *klient w Urzędzie – wydawnictwa GUM – Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*)

„Evaluation of the uncertainty of measurement in calibration. EA-4/02 M: 2013” wydany przez stowarzyszenie *European co-operation for Accreditation* (EA), adres internetowy www.european-accreditation.org/wp-content/uploads/2018/10/ea-4-02-m-rev01-september-2013.pdf w języku angielskim

polskie tłumaczenie „Wyznaczanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu”, adres internetowy: www.pca.gov.pl/download/gfx/pca/pl/defaultstronaopisowa/56/5/1/ea-4-02m.pdf

Opracowania pracowników polskiego urzędu GUM: „Niepewność pomiarów w teorii i praktyce” strona internetowa GUM, zakładki *transfer wiedzy – publikacje – niepewność pomiaru – opracowania własne GUM* oraz *transfer wiedzy – publikacje – wcześniejsze publikacje*

Niepewność uzyskanej wartości pomiaru – wątpliwość w tę wartość.

Niepewność – parametr związany z wynikiem pomiaru i charakteryzujący rozrzut wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości mierzonej (mezurandowi).

- Wartości wyników pomiarów muszą być uzyskane w efekcie przeprowadzenia pewnego eksperymentu, pomyślanego jako właściwy do pozyskiwania informacji ilościowych o badanej wielkości.
- Dla tych wartości wyników pomiarów trzeba obliczyć wartość pewnego parametru, który charakteryzuje ich rozrzut.

Dla pomiarów wielokrotnych rozważane wartości wyników pomiarów są wartościami uzyskanymi podczas wielokrotnego mierzenia tego samego, niezmiennego mezurandu, przeprowadzanego w tych samych, niezmiennych warunkach – stałość mezurandu objawia się **brakiem rosnącego lub malejącego trendu wyników kolejno powtarzanych pomiarów** – wyniki pomiarów zmieniają się całkowicie losowo, nie są stopniowo coraz większe lub coraz mniejsze. Poprawnie przeprowadzone pomiary **wykluczają** możliwość popełniania błędów grubych, czyli uzyskiwania **wyników odstających**.

Statystyka matematyczna – parametrem charakteryzującym rozrzut wartości jest **odchylenie standardowe** (dodatni pierwiastek kwadratowy wariancji) – jest to **niepewność standardowa** – definicyjnie wymagana jest znajomość wartości oczekiwanej zmiennej losowej, którą dla pomiarów idealnie dokładnych utożsamia się z mezurandem, oraz znajomość rozkładu prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej. Zawsze jednak można posługiwać się odpowiednimi estymatorami.

Dla przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa znane są jego kwantyle określonych rzędów wyznaczające odpowiednie dystrybuanty tego rozkładu i rozważa się przedział niepewności (tu: **przedział objęcia**) wyniku pomiaru określany przez poziom ufności (tu: **prawdopodobieństwo rozszerzenia**) – prawdopodobieństwo tego, że mezurand znajduje się wewnątrz takiego przedziału, liczone jako różnica tych dystrybuant dla kwantyli równo większego i mniejszego od najbardziej prawdopodobnej wartości pomiaru o krotność odchylenia standardowego tych pomiarów przyjętą odpowiednio do prawdopodobieństwa rozszerzenia – granice tego przedziału są **niepewnością rozszerzoną**.

Jeżeli dana wielkość fizyczna jest wielkością pochodną i jej wartość oblicza się z innych wartości (bezpośrednio mierzonych lub przyjętych jako stałe), to niepewność obliczonej wartości wielkości pochodnej oblicza się z niepewności wartości przyjętych do jej obliczenia, branych proporcjonalnie do tego, jak wartość wielkości pochodnej zależy od wartości wielkości, z których jest obliczana – jest to **niepewność złożona standardowa**.

Rozważając przedział objęcia wyznaczonej wartości wielkości pochodnej dla przyjętego **prawdopodobieństwa rozszerzenia** wyznacza się **niepewność złożoną rozszerzoną**.

Wynik i niepewność pomiaru bezpośredniego

Dla n -krotnie wykonanego bezpośredniego pomiaru mierzonej wielkości fizycznej przy zastosowaniu określonej procedury (w ustalonych warunkach pomiaru) wykorzystującej określony przyrząd pomiarowy otrzyma się n wartości pomiarów x_i – wartości surowych skorygowanych o poprawki wynikające z analizy zidentyfikowanych oddziaływań systematycznych.

Zakłada się, że uzyskane wartości x_i są realizacjami zmiennej losowej o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną estymowaną przez wartość średniej arytmetycznej tych wartości i z odchyleniem standardowym estymowanym przez eksperymentalne odchylenie standardowe z próby.

Jako wynik pomiaru jest brana średnia arytmetyczna $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ uzyskanych wartości x_i .

Niepewność standardowa $u(x)$ takiego wyniku pomiaru, składa się z niepewności standardowych wyznaczanych metodami typu A i B, w których wyznacza się odpowiednie odchylenia standardowe.

Metoda typu A - obliczenie niepewności standardowej u_A (niepewności typu A) **na drodze analizy statystycznej serii wyników pomiarów x_i** , czyli **z obserwowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa – eksperymentalnego rozkładu częstości występowania wartości wyników pomiarów uzyskanych w danym eksperymencie pomiarowym:**

- sprawdzenie losowości kolejno uzyskanych wyników (braku rosnącego lub malejącego trendu ich zmienności),
- sprawdzenie występowania i odrzucenie wyników odstających (obarczonych błędami grubymi) w oparciu o wiedzę i doświadczenie w prowadzeniu pomiarów, testy statystyczne do oceny wyników jako odstających lub w ostateczności regułę „trzech sigm”,
- dla wyników przyjętych za poprawne oblicza się średnią arytmetyczną $\bar{x}$ i odchylenie standardowe tej wartości średniej $u_A(x) = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ - wartość tego odchylenia jest wartością niepewności standardowej typu A.

Dla identycznych wszystkich wyników x_i uzyskuje się $u_A = 0$.

Dla wyniku pojedynczego (dla braku powtarzania pomiaru) przyjmuje się $u_A = 0$.

$s_{\bar{x}}$ - estymator teoretycznego odchylenia standardowego wartości średniej arytmetycznej wyniku pomiaru – wyznaczenie wartości $u_A(x)$ też ma pewną niepewność.

Jeżeli rozkład prawdopodobieństwa otrzymywania różnych wartości wyników pomiarów jest rozkładem normalnym, to wartość prawdziwa badanej wielkości z prawdopodobieństwem $p = 1 - \alpha$ znajduje się w przedziale $[\bar{x} - ku_A(x), \bar{x} + ku_A(x)] = [\bar{x} - ks_{\bar{x}}, \bar{x} + ks_{\bar{x}}]$, k - kwantyl rzędu $\frac{\alpha}{2} + p = 1 - \frac{\alpha}{2}$ rozkładu t -Studenta o $\nu = n - 1$ stopniach swobody (dla coraz większej liczby n wykonanych pomiarów coraz bardziej zbliżony do kwantyla standaryzowanego rozkładu normalnego tego rzędu), $ku_A \equiv U_A$ - rozszerzona niepewność standardowa typu A.

Niepewność standardową typu A można powiązać z wartością granicznego błędu przypadkowego.

Metoda typu B - obliczenie niepewności standardowej u_B (niepewności typu B) **na drodze innej niż analiza statystyczna serii wyników pomiarów**, czyli **z funkcji gęstości prawdopodobieństwa założonej i przyjętej jako opisującej rozkład częstości występowania wartości wywołujących dany element niepewności wartości x** , związany np. z zastosowanym przyrządem pomiarowym, z losową niestałością mezurandu, z warunkami otoczenia, z osobą wykonującą pomiar itd.; wykorzystuje się wszelkie dostępne informacje o możliwej zmienności wartości wyników pomiarów, np.:

- informacje producenta o przyrządzie (np. klasę dokładności przyrządu),
- informacje z procesu wzorcowania i justowania przyrządu,
- doświadczenie mierzącego w podobnych pomiarach (o stosowanym przyrządzie i badanym mezurandzie),
- informacje od innych mierzących (np. z podręczników)
- itp.

Metoda oparta na naukowym spojrzeniu mierzącego na proces pomiarowy.

Niepewność standardową typu B można powiązać z wartością granicznego błędu systematycznego wyznaczanego dla przypadku kilku serii pomiarów wielokrotnych (zakłada się, że błąd ten jest stały dla danej realizacji eksperymentu pomiarowego (pojedynczej serii wyników uzyskanych bezpośrednio jeden po drugim) i że może się zmieniać dla różnych takich realizacji (jest zmienną losową o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa)).

Przykład: gdy z dostępnych informacji wynika, że niepewność typu B jest znana (wynosi U_B) i że jest określona wielokrotnością (k -tą) odchylenia standardowego uzyskanego wyniku, to

$$u_B(x) = \frac{U_B(x)}{k}.$$

Przykład: gdy prawdopodobieństwo znajdowania się wartości x w przedziale $[a,b]$ o długości $b - a \equiv 2D$ wynosi $p = 1 - \alpha$ i rozkład możliwych wartości x jest **rozkładem normalnym** $N(\mu_x, \sigma_x)$ o wartości oczekiwanej μ_x występującej w środku tego przedziału (jej estymatorem jest $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$), to:

- k jest kwantylem rzędu $\frac{\alpha}{2} + p = 1 - \frac{\alpha}{2}$ rozkładu $N(0,1)$,
- prawdopodobieństwo znajdowania się wartości prawdziwej x_0 badanej wielkości wewnątrz przedziału $[a,b] = [\bar{x} - D, \bar{x} + D]$ wynosi p – jest to przedział objęcia dla poziomu ufności p : $[\bar{x} - ku_B(x), \bar{x} + ku_B(x)]$,
- wartość $ku_B \equiv U_B$ jest rozszerzoną niepewnością standardową typu B i

$$u_B(x) = \sigma_x = \frac{D}{k} = \frac{U_B(x)}{k}.$$

- $p = 0,5$ (szansa znalezienia się wartości x w przedziale $[a,b]$ jest szansą „pół na pół”):
 k - górny kwantyl (kwantyl rzędu 0,75) rozkładu $N(0,1)$ i $u_B(x) = \frac{D}{0,674490} = 1,482602 D$ -
 $[a,b]$ ma długość IQR (ang. **interquartile range**)
- $p = 0,682689$: k - kwantyl rzędu 0,841344 rozkładu $N(0,1)$ i $u_B(x) = D$ - $[a,b]$ jest przedziałem „jednosigmowym”
- $p = 0,9$ (szansa znalezienia się wartości x w przedziale $[a,b]$ jest szansą „dziewięć na dziesięć”): k - kwantyl rzędu 0,95 rozkładu $N(0,1)$ i $u_B(x) = \frac{D}{1,644853} = 0,607957 D$
- $p = 0,95$ (szansa znalezienia się wartości x w przedziale $[a,b]$ jest szansą „dziewięćdziesiąt pięć na sto”): k - kwantyl rzędu 0,975 rozkładu $N(0,1)$ i $u_B(x) = \frac{D}{1,959964} = 0,510213 D$
- $p = 0,9546$: k - kwantyl rzędu 0,97725 rozkładu $N(0,1)$ i $u_B(x) = \frac{D}{2} = 0,5D$ - $[a,b]$ jest przedziałem „dwusigmowym”
- $p = 0,99$ (szansa znalezienia się wartości x w przedziale $[a,b]$ jest szansą „dziewięćdziesiąt dziewięć na sto”): k - kwantyl rzędu 0,995 rozkładu $N(0,1)$ i $u_B(x) = \frac{D}{2,575829} = 0,388224 D$
- $p = 0,9973$: k - kwantyl rzędu 0,99865 rozkładu $N(0,1)$ i $u_B(x) = \frac{D}{3} = 0, (3)D$ - $[a,b]$ jest przedziałem „trysigmowym”

Przykład: gdy z dostępnych informacji wynika, że wartości x mogą znajdować się tylko w przedziale $[a,b]$ o długości $b - a \equiv 2D$ i nie wiadomo, jakie są prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych wartości x z tego przedziału, to przyjmuje się, że jest ono takie samo dla wszystkich wartości x tego przedziału i można je opisać **rozkładem prostokątnym** o wartości oczekiwanej występującej w środku tego przedziału (dla $\bar{x} = \frac{a + b}{2}$), co daje

$$u_B(x) = \sigma_x = \frac{b - a}{2\sqrt{3}} = \frac{D}{\sqrt{3}}$$

przypadek stosowany np. przy wyznaczaniu niepewności wyniku pomiaru wynikającej z błędu granicznego systematycznego popełnianego przy posługiwaniu się danym przyrządem pomiarowym (błędu dopuszczalnego przyrządu pomiarowego), dla którego przedział $[a,b] = [-\Delta_{gs}x, +\Delta_{gs}x]$ jest symetryczny względem $\Delta_s x = 0$, a $D = \Delta_{gs}x$;
sposoby wyznaczania błędów dopuszczalnych dla różnych przyrządów pomiarowych zostały pokazane wcześniej.

Przykład: gdy z dostępnych informacji wynika, że wartości x mogą znajdować się tylko w przedziale $[a, b]$ o długości $b - a \equiv 2D$ i że prawdopodobieństwo wystąpienia poszczególnych wartości x z tego przedziału jest największe w środku tego przedziału (dla $\bar{x} = \frac{a + b}{2}$) i że liniowo maleje ono wraz ze zbliżaniem się wartości x do granic tego przedziału, to przyjmuje się, że to prawdopodobieństwo można opisać **rozkładem trójkątnym** o wartości oczekiwanej występującej w środku tego przedziału (dla $\bar{x}$), co daje $u_B(x) = \sigma_x = \frac{b - a}{2\sqrt{6}} = \frac{D}{\sqrt{6}}$

przypadek stosowany np. przy wyznaczaniu niepewności wyniku pomiaru wykonywanego za pomocą przyrządów pomiarowych produkowanych seryjnie z tą samą założoną w produkcji wartością wzorca wewnętrznego x_w (potencjalnie występującą najczęściej) z dopuszczalną (znaną i ustaloną) jej maksymalną odchyłką Δ_{gw} , czyli gdy wzorzec ten może zmieniać się w granicach od $x_w - \Delta_{gw}$ do $x_w + \Delta_{gw}$, a w procesie produkcji przyrządu raczej wytwarzane są egzemplarze o $\Delta_w = 0$ niż o $\Delta_w = \Delta_{gw} = D$.

Przykład: gdy z dostępnych informacji wynika, że wartości x mogą znajdować się tylko w przedziale $[a,b]$ o długości $b - a \equiv 2D$ i że prawdopodobieństwo wystąpienia poszczególnych wartości x z tego przedziału jest największe i stałe w β -krotnie krótszym przedziale $[a',b']$ o długości $b' - a' \equiv 2\beta D$, $\beta \in [0,1]$, leżącym symetrycznie wewnątrz przedziału $[a,b]$ (oba te przedziały mają wspólny środek $\bar{x} = \frac{a+b}{2} = \frac{a'+b'}{2}$), i że liniowo maleje ono wraz ze zmianą wartości x od zbliżonych do granic przedziału $[a',b']$ do zbliżonych do granic przedziału $[a,b]$, to przyjmuje się, że prawdopodobieństwo to można opisać **rozkładem trapezowym** o wartości oczekiwanej występującej w środku tego przedziału (dla $\bar{x}$), co daje

$$u_B(x) = \sigma_x = \frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{1+\beta^2}{6}} = D \sqrt{\frac{1+\beta^2}{6}}.$$

Przykład: gdy z dostępnych informacji wynika, że wielkości badane mogą przyjmować tylko dwie wartości, będące w naturalny sposób granicami przedziału $[a,b]$ o długości $b - a \equiv 2D$, to przyjmuje się, że prawdopodobieństwo ich występowania można opisać **rozkładem w kształcie litery U** o dwóch wartościach oczekiwanych występujących dla granic tego przedziału. Jeśli obie te wartości są tak samo prawdopodobne (rozkład jest symetryczny), to

$$u_B(x) = \sigma_x = \frac{b-a}{2\sqrt{2}} = \frac{D}{\sqrt{2}}.$$

Dla M źródeł niepewności wyznaczanych metodą typu B nieskorelowanych ze sobą (niepowiązanych, wynikających z niezależnych od siebie procesów) łączna niepewność standardowa

wyznaczana metodą typu B:
$$u_B(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^M u_{B_i}^2(x)}$$

kwadrat niepewności jest sumą kwadratów niepewności składowych

– **prawo dodawania niepewności** – prawo dodawania wariancji, znane z teorii błędów:

wariancja zmiennej losowej wyznaczająca całkowitą niepewność jest sumą wariancji zmiennych losowych składających się na tę całkowitą niepewność

Prawo dodawania niepewności określa też **całkowitą niepewność standardową** wyniku

pomiaru:
$$u(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} = \sqrt{u_A^2(x) + \sum_{i=1}^M u_{B_i}^2(x)}$$

Ponieważ wartość niepewności zaokrągla się do pozycji dziesiętnej drugiej cyfry znaczącej realnie uwzględnia się tylko największe niepewności składowe (niepewności mniejsze o rząd wartości od niepewności największej można pominąć – ich udział w obliczanej niepewności jest widoczny na pozycjach dziesiętnych odrzucanych przy takim zaokrągłaniu).

Przykład: mierniczy samokrytycznie oceniający swój błąd raczej na 0 i maksymalnie na $\Delta_e x$ wykonał n -krotny pomiar tego samego mezurandu w tych samych warunkach przyrządem o błędzie dopuszczalnym $\Delta_d x$. Przyjmując rozkład trójkątny, jako przedstawiający prawdopodobieństwo występowania błędu eksperymentatora, i prostokątny, jako przedstawiający prawdopodobieństwa występowania wartości błędów systematycznych dla zastosowanego przyrządu pomiarowego, niepewność standardową wyniku należy obliczyć z zależności uwzględniającej niepewność standardową typu A (dla obserwowanego rozrzutu wyników pomiarów) oraz niepewności standardowe typu B określone dla przyrządu $u_{\Delta_p x}$ i dla eksperymentatora $u_{\Delta_e x}$:

$$u(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} = \sqrt{u_A^2(x) + u_{\Delta_p x}^2 + u_{\Delta_e x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)} + \frac{(\Delta_d x)^2}{3} + \frac{(\Delta_e x)^2}{6}}$$

Wyznaczanie błędu dopuszczalnego przyrządu $\Delta_d x$ było pokazane wcześniej.

Błąd eksperymentatora $\Delta_e x$ posługującego się przyrządem ze wskaźnikiem:

- wskazówkowym jest szacowana na wartość połowy działki elementarnej jego skali,
- cyfrowym jest szacowana na zero.

Względna niepewność standardowa $u_r(x)$ wyniku pomiaru (ang. *relative standard uncertainty*) - iloraz wyznaczonej niepewności standardowej pomiaru i modułu wyznaczonej wartości pomiaru:

$$u_r(x) = \frac{u(x)}{|\bar{x}|} = \sqrt{\left(\frac{u_A(x)}{\bar{x}}\right)^2 + \sum_{i=1}^M \left(\frac{u_{B_i}(x)}{\bar{x}}\right)^2} = \sqrt{u_{Ar}^2(x) + \sum_{i=1}^M u_{B_i r}^2(x)}$$

u_{Ar} i u_{Br} - względne niepewności standardowe typu A i B
– prawo dodawania niepewności można zapisać też dla niepewności względnych

Zwykle podaje się ją w procentach wyniku pomiaru (po przemnożeniu przez 100 %).

Gdy rozważanych składników niepewności standardowej typu B nie można łatwo przeliczyć na wartości wyrażone w jednostkach wielkości x korzysta się z zależności

$$u_r(x) = \frac{u(x)}{|\bar{x}|} = \sqrt{\left(\frac{u_A(x)}{\bar{x}}\right)^2 + \sum_{i=1}^M \left(\frac{u_{B_i}(x)}{B_i}\right)^2}$$

B_i - „nominalne wartości” wielkości rozważanych jako źródła niepewności standardowej typu B

Niepewność standardowa jest miarą ilościowo wyrażającą niepewność wyniku pojedynczego pomiaru (wynikiem pojedynczego pomiaru wielokrotnego jest średnia arytmetyczna serii wyników pomiarów wykonywanych w takich samych warunkach).

Kolejne realizacje jakiegoś eksperymentu pomiarowego mającego wyznaczyć wartość potencjalnie tej samej wartości wielkości mierzonej, wykonywane w różnym czasie i w różnych miejscach, mogą dawać różne wyniki (patrz: odtwarzalność).

Potrzebna jest miara niepewności wyniku pomiaru określająca przedział wartości wyników, który obejmuje dużą część uzyskiwanych wyników rozłożonych wokół wartości prawdziwej. Im szerszy jest ten przedział, **przedział objęcia**, tym więcej wartości zawiera. Przyjmowanie konkretnej szerokości tego przedziału jest kompromisem pomiędzy uzyskaniem przedziału bezpiecznego (wartość zmierzona może być uznana za prawidłową) i przedziału realistycznego (nie nadmiernie szerokiego). Granice tego przedziału przyjmuje się dla danej k -krotności niepewności standardowej i nazywa **niepewnością rozszerzoną**:

$$U(x) = ku(x) = k\sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} = k\sqrt{s_x^2(x) + \sum_{i=1}^M u_{B_i}^2(x)}$$

k współczynnik rozszerzenia

Przedział objęcia $[\bar{x} - U(x), \bar{x} + U(x)]$ wyznaczony wokół wartości $\bar{x}$ wyniku pomiaru zawiera wartość prawdziwą mierzonej wielkości dla danej wartości k z **prawdopodobieństwem rozszerzenia (objęcia) p** związanym z wartością k .

Jeżeli na $u(x)$ składa się **tylko** niepewność **typu A** i wyniki pomiarów podlegają rozkładowi **normalnemu**, to k jest kwantylem rzędu $\frac{\alpha}{2} + p = 1 - \frac{\alpha}{2}$ rozkładu t -Studenta o $v = n - 1$ stopniach swobody (dla coraz większej liczby n wykonanych pomiarów jest coraz bardziej zbliżony do kwantyla standaryzowanego rozkładu normalnego $N(0,1)$ tego rzędu), np. dla $n > 20$: $k = 1$ daje $p = 0,68$, dla $p = 0,95$ przyjmuje się zwykle $k = 2$, a dla $p = 0,997$: $k = 3$ (przedziały jedno-, dwu- i trzysigmowe).

Jeżeli na $u(x)$ składa się **tylko** niepewność **typu B** i wyniki pomiarów podlegają rozkładowi:

- **prostokątnemu**, to prawdopodobieństwo znajdowania się wartości prawdziwej mierzonej wielkości w przedziale objęcia wynosi $p = \frac{k}{\sqrt{3}}$ ($\Rightarrow k = p\sqrt{3}$), np. dla $p = 0,95$: $k = 1,65$,

dla $k = 1$: $p = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$ (przedział jednosigmowy obejmuje trochę więcej niż połowę wyników), a dla $k = \sqrt{3} \approx 1,73$: $p = 1$ (przedział $1\frac{3}{4}$ -sigmowy zawiera wszystkie wyniki),

- **trójkątnemu**, to prawdopodobieństwo znajdowania się wartości prawdziwej mierzonej wielkości w przedziale objęcia wynosi $p = \frac{2k\sqrt{6} - k^2}{6}$ ($\Rightarrow k = \sqrt{6}(1 - \sqrt{1 - p})$), np. dla $p = 0,95$:

$k = 1,9$, dla $k = 1$: $p = \frac{2\sqrt{6} - 1}{6} \approx 0,65$ (przedział jednosigmowy obejmuje prawie $2/3$ wyników), a dla $k = \sqrt{6} \approx 2,45$: $p = 1$ (przedział $2\frac{1}{2}$ -sigmowy zawiera wszystkie wyniki),

- itd.

Zwykle na $u(x)$ składają się **jednocześnie** niepewności obu **typów (A i B)**.

Aby wyznaczyć wartość współczynnika rozszerzenia jako odpowiedniego kwantyla odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa trzeba wiedzieć, jaki jest to rozkład.

Dla **dużej** liczby pomiarów ($n > 20$) zakłada się, że jest to rozkład zbliżony do rozkładu **normalnego** i k jest kwantylem rozkładu normalnego $N(0,1)$ (dla zwykle rozważanych prawdopodobieństw rozszerzenia 0,95 i 0,99 można przyjmować wartości współczynnika rozszerzenia przybliżone jako odpowiednio 2 i 3).

Dla **małej** liczby pomiarów ($n \leq 20$) zakłada się, że jest to rozkład zbliżony do rozkładu **t-Studenta** i k jest kwantylem rzędu $\frac{\alpha}{2} + p = 1 - \frac{\alpha}{2}$ rozkładu t -Studenta o

$$v = \frac{u^4(x)}{\frac{u_A^4(x)}{v_A} + \sum_{i=1}^M \frac{u_{B_i}^4(x)}{v_{B_i}}} \text{ stopniach swobody,}$$

$v_A = n - 1$ - liczba stopni swobody wyznaczania niepewności standardowej typu A

$v_{B_i} = \frac{1}{2\delta_{B_i}^2}$ - liczba stopni swobody wyznaczania niepewności standardowej typu B

$\delta_{B_i} = \frac{\Delta u_{B_i}(x) = u(u_{B_i}(x))}{u_{B_i}(x)}$ - względny błąd (niepewność) wyznaczania i -tego składnika niepewności standardowej typu B ($B_i = \Delta_p x \rightarrow$ niepewność $u_{\Delta_p x}$ wzorcowania przyrządu pomiarowego oraz błąd $\delta_{\Delta_p x}$ bywają podawane przez jego producenta)

Gdy:

- dany składnik niepewności standardowej typu B wyznaczono dokładnie (błąd jej wyznaczania jest zerowy),
- brak danych do wyznaczenia v_B , ale wiadomo, że niepewność typu B wyznaczono korzystając z rozkładu prostokątnego z granicami dobranymi tak, aby prawdopodobieństwo znajdowania się wartości mierzonej wielkości poza tym przedziałem było bardzo małe (spełnione już dla $k > 1,73$, a więc i dla $k = 2$ wyznaczającego prawdopodobieństwo rozszerzenia 0,95 dla niepewności typu A),

to można brać $v_B \rightarrow \infty$, co daje:
$$v = \frac{u^4(x)}{\frac{u_A^4(x)}{v_A} + 0} = v_A \left(\frac{u_A^2(x) + u_B^2(x)}{u_A^2(x)} \right)^2 = v_A \left(1 + \frac{u_B^2(x)}{u_A^2(x)} \right)^2.$$

Jeżeli v nie jest liczbą całkowitą, to zaokrągla się ją w dół do najbliższej liczby całkowitej.

Względna niepewność rozszerzona $U_r(x)$ wyniku pomiaru: $U_r(x) = \frac{U(x)}{|\bar{x}|} = \frac{ku(x)}{|\bar{x}|} = ku_r(x)$.

Zwykle podaje się ją w procentach wyniku pomiaru (po przemnożeniu przez 100 %).

Odpowiedni przedział objęcia: $[\bar{x} - |\bar{x}|U_r(x), \bar{x} + |\bar{x}|U_r(x)] = [\bar{x}(1 - U_r(x)), \bar{x}(1 + U_r(x))]$

$$\text{lub } \left[\frac{100 \% - U_r(x) / \%}{100 \%} \bar{x}, \frac{100 \% + U_r(x) / \%}{100 \%} \bar{x} \right].$$

Propagacja niepewności w pomiarach pośrednich – wynik i niepewność pomiaru pośredniego

Poszukiwana wielkość „mierzona” (wyjściowa) y jest wyznaczana na podstawie m innych wielkości realnie mierzonych lub o wartościach przyjętych jako stałe (wejściowych) x_i :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

np. wyznaczana jest wartość prędkości średniej v na podstawie pomiarów długości drogi s i czasu przejazdu t : $v = f(s, t) = s/t = st^{-1}$

Każda z wartości x_i jest wyznaczana dla n_i wartości x_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n_i$) wyników wielokrotnych pomiarów tych samych wartości mierzonych wielkości wykonywanych w tych samych warunkach jako $x_{0i} = x_{i, \text{pop}}$ i dla każdej z nich znana jest niepewność standardowa $u(x_i)$ wyznaczona metodami typu A i B.

Wyznaczana wartość wielkości y ma swoją wartość prawdziwą y_0 i jest obliczana jako:

- funkcja średnich arytmetycznych wartości x_i :

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m), \quad \bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}, \text{ co można zrobić zawsze,}$$

- średnia arytmetyczna wartości funkcji f_k obliczonych dla kolejnych pomiarów

$$y = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}), \text{ co można robić tylko wtedy,}$$

gdy wszystkie wielkości x_i zmierzono dokładnie tyle samo razy: $n_1 = n_2 = \dots = n_m \equiv n$ i ma swoją **złożoną niepewność standardową** $u_c(y)$ (ang. *combined standard uncertainty*).

Złożoną niepewność standardową wyznacza się z prawa propagacji niepewności (kwadrat niepewności wyznaczonej wartości wielkości y jest sumą kwadratów niepewności składowych określonych dla wielkości mierzonych x_i , t.j. ich niepewności standardowych $u(x_i)$ z uwzględnieniem wpływu wartości wielkości x_i na wartość wielkość y):

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} u(x_i, x_j)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}$$

$\frac{\partial y}{\partial x_i} \equiv y_{x_i}^I \equiv c_i$ - **współczynniki wrażliwości** wielkości y na wielkość x_i - pochodne cząstkowe

opisujące jak zmiany wartości wielkości x_i wpływają na zmianę wartości wielkości y ,

$u(x_i, x_j) = u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j)$ - estymatory „kowariancji” (oprócz niepewności typu A jest jeszcze niepewność typu B) między wielkościami x_i i x_j (miary ich wzajemnej zależności),

$u(x_i)$ - niepewności standardowe wartości wielkości x_i ,

$r(x_i, x_j)$ - estymatory współczynnika korelacji między wielkościami x_i i x_j ; mogą przyjmować wartości z przedziału $[-1, 1]$; są zerem dla nieskorelowanych wartości wielkości x_i i x_j ; wyznaczalne dla tak samo licznych wyników pomiarów wielokrotnych wielkości x_i i x_j ,

$c_i u(x_i) \equiv u_i(y)$ - składniki (udziały) złożonej niepewności standardowej wyznaczonej wartości y wyznaczone dla wielkości x_i .

Dla takich oznaczeń:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_i u(x_i))^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2(y) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m u_i(y) u_j(y) r(x_i, x_j)}$$

Jeżeli wszystkie wartości wejściowe są ze sobą w pełni dodatnio skorelowane (wszystkie $r(x_i, x_j) = +1$; sytuacja unikana i rzadko spotykana) to $u_c(y) = \sum_{i=1}^m c_i u(x_i) = \sum_{i=1}^m u_i(y)$.

Jeżeli żadne wartości wejściowe nie są ze sobą skorelowane (wszystkie $r(x_i, x_j) = 0$; sytuacja pożądana – pomiary wielkości x_i nie wpływają na pomiary wielkości x_j) to

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_i u(x_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2(y)}$$

- kwadrat złożonej niepewności standardowej wyznaczenia wartości wielkości wyjściowej y jest sumą kwadratów jej składników wyznaczanych dla wielkości wejściowych x_i
 - ***prawo dodawania niepewności wyniku pomiaru pośredniego uzyskiwanego z nieskorelowanych wartości mierzonych bezpośrednio.***

Względna złożona niepewność standardowa $u_{rc}(x)$ wyniku pomiaru (ang. *relative combined standard uncertainty*) - iloraz wyznaczonej złożonej niepewności standardowej pomiaru i modułu wyznaczonej wartości pomiaru: $u_{rc}(y) = \frac{u_c(y)}{|y|}$.

Dla nieskorelowanych wartości mierzonych bezpośrednio: $u_{rc}(y) = \frac{u_c(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{u_i(y)}{y} \right)^2}$

$u_i(y)$ - składniki (udziały) złożonej niepewności standardowej wyznaczonej wartości y
wyznaczone dla wielkości x_i

$\frac{u_i(y)}{y}$ - względne udziały złożonej niepewności standardowej wyznaczonej wartości y
wyznaczone dla wielkości x_i

– prawo dodawania niepewności można zapisać też dla niepewności względnych.

Zwykle podaje się ją w procentach wyniku pomiaru (po przemnożeniu przez 100 %).

Dla iloczynowej postaci zależności $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = a \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i}$:

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = a \alpha_i \frac{x_i^{\alpha_i}}{x_i} \prod_{j \neq i} x_j^{\alpha_j} = \alpha_i \frac{y}{x_i} \quad \text{ i } \quad u_i(y) = \alpha_i y \frac{u(x_i)}{x_i}$$

złożona niepewność standardowa

$$\begin{aligned} u_c(y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 y^2 \left(\frac{u(x_i)}{x_i} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \alpha_i \alpha_j y^2 \frac{u(x_i)}{x_i} \frac{u(x_j)}{x_j} r(x_i, x_j)} = \\ &= |y| \sqrt{\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \left(\frac{u(x_i)}{x_i} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \alpha_i \alpha_j \frac{u(x_i)}{x_i} \frac{u(x_j)}{x_j} r(x_i, x_j)} \end{aligned}$$

względna złożona niepewność standardowa

$$\begin{aligned} u_{rc}(y) &= \frac{u_c(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \left(\frac{u(x_i)}{x_i} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \alpha_i \alpha_j \frac{u(x_i)}{x_i} \frac{u(x_j)}{x_j} r(x_i, x_j)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 u_r^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \alpha_i \alpha_j u_r(x_i) u_r(x_j) r(x_i, x_j)} \end{aligned}$$

np. dla prędkości v i braku skorelowania pomiarów drogi s i czasu t ($r(s,t) = 0$):

$$\begin{aligned}
 u_c(v) &= \sqrt{\left(v_s^I u(s)\right)^2 + \left(v_t^I u(t)\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\left(\frac{s}{t}\right)_s^I u(s)\right)^2 + \left(\left(\frac{s}{t}\right)_t^I u(t)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{t} u(s)\right)^2 + \left(-\frac{s}{t^2} u(t)\right)^2} = \\
 &= \frac{1}{t} \sqrt{u^2(s) + \frac{s^2}{t^2} u^2(t)} = \frac{1}{t} \sqrt{u_A^2(s) + u_B^2(s) + \left(\frac{s}{t} = v\right)^2 (u_A^2(t) + u_B^2(t))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{rc}(v) &= \sqrt{\left(v_s^I \frac{u(s)}{v}\right)^2 + \left(v_t^I \frac{u(t)}{v}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{\left(\frac{s}{t}\right)_s^I u(s)}{\frac{s}{t}}\right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{s}{t}\right)_t^I u(t)}{\frac{s}{t}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{t} u(s)}{\frac{s}{t}}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{s}{t^2} u(t)}{\frac{s}{t}}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{u(s)}{s}\right)^2 + \left(\frac{u(t)}{t}\right)^2} = \sqrt{u_r^2(s) + u_r^2(t)} = \sqrt{\frac{u_A^2(s) + u_B^2(s)}{s^2} + \frac{u_A^2(t) + u_B^2(t)}{t^2}}
 \end{aligned}$$

Budżet niepewności pomiaru w syntetycznej formie przedstawia wszystkie źródła niepewności rozważane przy wyznaczaniu wartości i niepewności wielkości y .

symbol wielkości X_i	wartość x_i	niepewność standardowa $u(x_i)$	rozkład prawdopodobieństwa	współczynnik wrażliwości c_i	składnik niepewności $u_i(y)$
X_1	x_1	$u(x_1)$	nazwa 1	c_1	$u_1(y)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	nazwa 2	c_2	$u_2(y)$
...	...	...	...	...	...
X_m	x_m	$u(x_m)$	nazwa m	c_m	$u_m(y)$
Y	y				$u_c(y)$

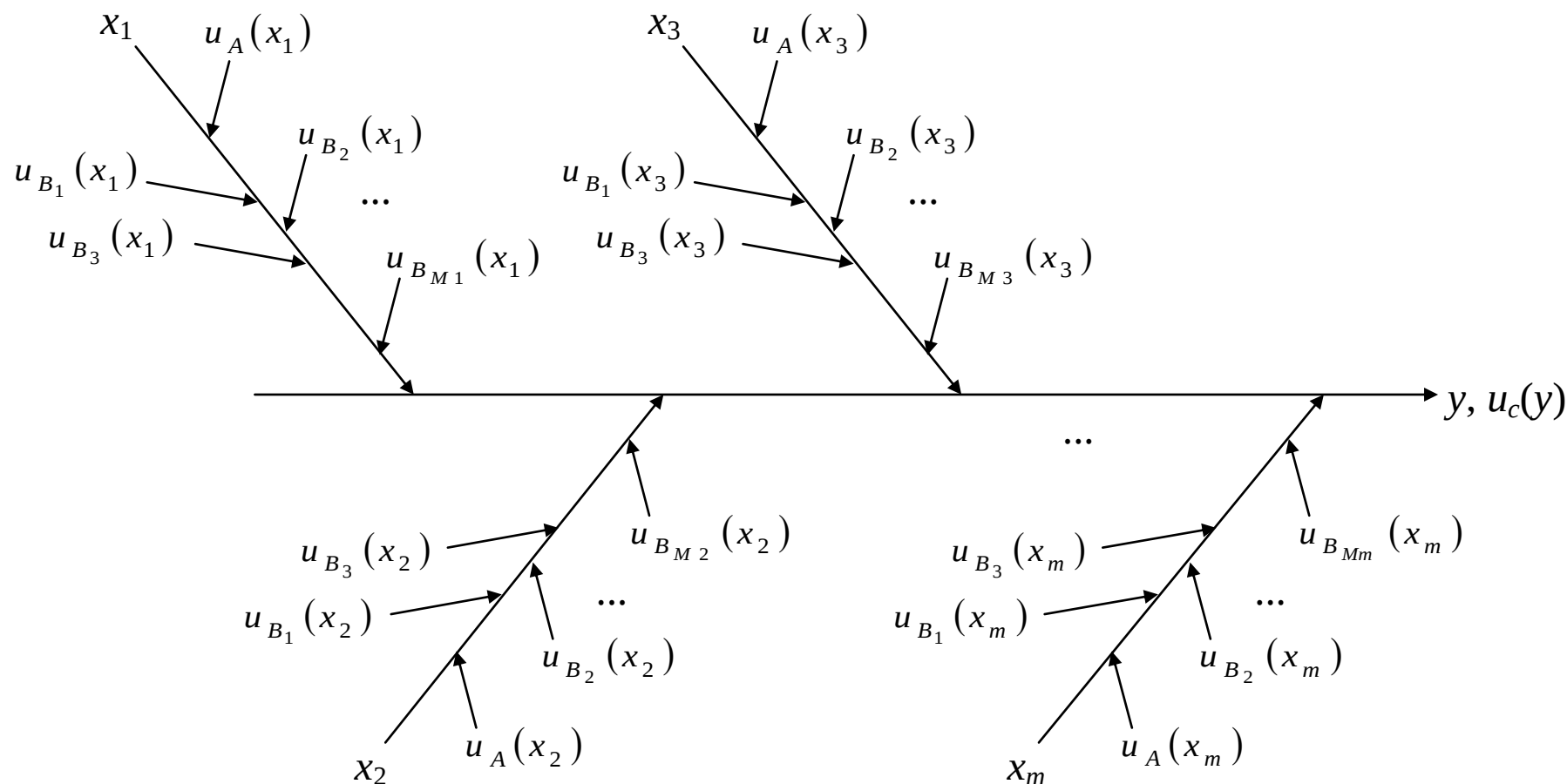


Diagram „rybich ości” przedstawiający elementy składowe (zidentyfikowane źródła) złożonej niepewności standardowej $u_c(y)$ pomiaru pośredniego y

x_i – wielkości wyznaczane bezpośrednio; $i = 1, \dots, m$;

m – liczba wielkości uwzględnianych przy obliczaniu wartości wielkości y ;

$u_A(x_i)$ – niepewność standardowa wartości wielkości x_i uzyskana metodą typu A;

$u_{B_j}(x_i)$ – niepewności standardowe wartości wielkości x_i uzyskane metodą typu B (dla każdej wielkości x_i jest ich odpowiednio $M_i, j = 1, \dots, M_i$)

Złożona niepewność standardowa jest miarą ilościowo wyrażającą niepewność wyniku pojedynczego pomiaru pośredniego (wyniku obliczenia wartości wielkości y dla jednego zestawu wartości wielkości x_i).

Kolejne realizacje jakiegoś eksperymentu pomiarowego mającego wyznaczyć wartość potencjalnie tej samej wartości wielkości y , wykonywane w różnym czasie i w różnych miejscach, mogą dawać różne wyniki (patrz: odtwarzalność).

Potrzebna jest miara niepewności wyniku pomiaru określająca przedział wartości wyników, który obejmuje dużą część uzyskiwanych wyników rozłożonych wokół wartości prawdziwej. Im szerszy jest ten przedział, **przedział objęcia**, tym więcej wartości zawiera. Przyjmowanie konkretnej szerokości tego przedziału jest kompromisem pomiędzy uzyskaniem przedziału bezpiecznego (wartość zmierzona może być uznana za prawidłową) i przedziału realistycznego (nie nadmiernie szerokiego). Granice tego przedziału przyjmuje się dla danej k -krotności złożonej niepewności standardowej i nazywa **złożoną niepewnością rozszerzoną**:

$$U_c(y) = k u_c(y) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2(y) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m u_i(y) u_j(y) r(x_i, x_j)}$$

k współczynnik rozszerzenia

Przedział objęcia $[y - U_c(y), y + U_c(y)]$ wyznaczony wokół wartości y wyniku pomiaru pośredniego zawiera wartość prawdziwą wyznaczonej wielkości dla danej wartości k z **prawdopodobieństwem rozszerzenia (objęcia) p** związanym z wartością k .

Zasady wyznaczania złożonej niepewności rozszerzonej $U_c(y)$ wyznaczonej wartości wielkości y (przyjmowania wartości współczynnika k)

1. gdy wartość y jest kombinacją liniową niezależnych wartości x_i i **gdy** rozkłady prawdopodobieństwa uzyskiwania wartości x_i są znanymi rozkładami normalnymi lub prostokątnymi, trójkątnymi itp. i **gdy**:

1a. $u_i(y)$ są porównywalne, **przyjmuje się**, że rozkład wartości wielkości y jest rozkładem normalnym – wartości k przyjmuje się jako kwantyle rozkładu $N(0,1)$ rzędu odpowiedniego do przyjętego prawdopodobieństwa rozszerzenia p ,

np. dla $p = 0,95$ bierze się $k = 2$ – ‘z prawdopodobieństwem 0,95 wartość prawdziwa wielkości y znajduje się w przedziale $[y - 2u_c(y), y + 2u_c(y)]$ ’ lub ‘w przedziale tym znajduje się 95 % uzyskiwanych wyników wyznaczania wartości wielkości y ’

1b. $u(x_1)$ jest znacząco większa od niepewności $u(x_i)$, $i = 2, \dots, m$ o łącznej wartości

$$u_R(y) = \sqrt{\sum_{i=2}^m u_i^2(y)}, \text{ tzn. gdy } \frac{u_R(y)}{u_1(y)} \leq 0,316, \text{ kiedy to } \frac{u_c(y) - u_1(y)}{u_1(y)} \leq 0,05, \text{ przyjmuje się,}$$

że rozkład prawdopodobieństwa wartości wielkości y jest rozkładem przyjętym do opisywania wartości wielkości x_1 – wartości k przyjmuje się jako kwantyle tego rozkładu rzędu odpowiedniego do przyjętego prawdopodobieństwa rozszerzenia p

np. gdyby rozkład ten był rozkładem prostokątnym, to dla $p = 0,95$ bierze się $k = 1,65$ – ‘z prawdopodobieństwem 0,95 wartość prawdziwa wielkości y znajduje się w przedziale $[y - 1,65u_c(y), y + 1,65u_c(y)]$ lub ‘w przedziale ...’

1c. $u(x_1)$ i $u(x_2)$ o łącznej wartości $u_{1,2} = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y)}$ są znacząco większe od niepewności

$u(x_i)$, $i = 3, \dots, m$, o łącznej wartości $u_R = \sqrt{\sum_{i=3}^m u_i^2(y)}$, to stosuje się postępowanie pokazane

poprzednio; dodatkowo, jeśli wielkości y , x_1 i x_2 mają taki sam wymiar (wszystkie są np. długością l), jako rozkład prawdopodobieństwa $p(y(l))$ uzyskiwania wartości y przyjmuje się splot rozkładów $p_1(x_1(l))$ i $p_2(x_2(l))$ przyjętych do opisywania prawdopodobieństwa

uzyskiwania wartości x_1 i x_2 : $p(y(l)) = p_1(x_1(l)) * p_1(x_1(l)) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1(\lambda)) p_1(x_1(l - \lambda)) d\lambda$ –

wartości k przyjmuje się jako kwantyle tego splotu rzędu odpowiedniego do przyjętego prawdopodobieństwa rozszerzenia p

np. gdyby były to rozkłady prostokątne o szerokościach a i b ($a > b$) wyznaczających stosunek $\beta = b/a < 1$, to splot tych rozkładów jest rozkładem trapezowym ze współczyn-

nikiem β i dla $p = 0,95$ bierze się $k_\beta = \sqrt{\frac{6}{1 + \beta^2}} \cdot \begin{cases} 0,95 \frac{1 + \beta}{2} & \text{dla } \beta \geq 0,9047 \\ 1 - \sqrt{0,05(1 - \beta^2)} & \text{dla } \beta \leq 0,9047 \end{cases}$

– ‘z prawdopodobieństwem 0,95 wartość prawdziwa wielkości y znajduje się w przedziale $[y - k_\beta u_c(y), y + k_\beta u_c(y)]$ lub ‘w przedziale ...’

2. **gdy** wartość y **nie jest kombinacją liniową** niezależnych wartości x_i należy **określić** rozkład prawdopodobieństwa występowania wartości y (stosując różne analityczne i numeryczne metody wyznaczania rozkładu prawdopodobieństwa nieliniowej funkcji zmiennych losowych) **lub przyjąć hipotezę** o jego postaci i zweryfikować ją testem zgodności przy założonym poziomie istotności – wartości k przyjmuje się jako kwantyle tego wyznaczonego lub przyjętego rozkładu rzędu odpowiedniego do przyjętego prawdopodobieństwa rozszerzenia p

np. gdyby rozkład ten okazał się być rozkładem t -Studenta (najczęstsze założenie) to k jest kwantylem $t_{\alpha v}$ tego rozkładu rzędu odpowiedniego do przyjętego prawdopodobieństwa rozszerzenia o v_y stopniach swobody

$$v_y = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^m \frac{u_i^4(y)}{v_i}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^m \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{v_i}} = \frac{u_{rc}^4(y)}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{v_i} \left(\frac{u_i(y)}{y} \right)^4}$$

$u_c(y)$ i $u_{rc}(y)$ - złożone niepewności standardowe bezwzględna i względna wyznaczonej wartości y ,

$u_i(y)$ - składniki złożonej niepewności standardowej określone dla wartości x_i ,

v_i - stopnie swobody otrzymane przy analizie składników $u_i(y)$ (czyli analizie $u(x_i)$), jeżeli obliczona efektywna liczba stopni swobody v_{ef} nie jest liczbą całkowitą,

to zaokrągla się ją w dół do najbliższej liczby całkowitej;

– ‘z prawdopodobieństwem $p = 1 - \alpha$ wartość prawdziwa wielkości y znajduje się w przedziale $[y - t_{\alpha v} u_c(y), y + t_{\alpha v} u_c(y)]$ lub ‘w przedziale ...’

Względna złożona niepewność rozszerzona $U_{rc}(y)$ wyniku pomiaru:

$$U_{rc}(y) = \frac{U_c(y)}{|y|} = \frac{ku_c(y)}{|y|} = ku_{rc}(y).$$

Zwykle podaje się ją w procentach wyniku pomiaru (po przemnożeniu przez 100 %).

Odpowiedni przedział objęcia: $[y - |y|U_{rc}(y), y + |y|U_{rc}(y)] = [y(1 - U_{rc}(y)), y(1 + U_{rc}(y))]$

$$\text{lub} \left[\frac{100 \% - U_{rc}(y) / \%}{100 \%} y, \frac{100 \% + U_{rc}(y) / \%}{100 \%} y \right].$$

Zaokrąglanie wyników pomiarów

Obliczając **wynik pomiaru i jego błąd** zapis $x \pm \Delta x$ oznacza, że rzeczywista wartość mierzonej wielkości mieści się w przedziale $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ określonym dla danej wartości wyniku pomiaru x (wyniku surowego skorygowanego o poprawki systematyczne) i przyjętego bezwzględnego błędu tego wyniku Δx (zwykle granicznego) – jest to uproszczony zapis znanej z wykładu relacji: $x_0 = \overline{x_{sur}} - \sum_i p s_i \pm (\Delta_{gs} x + \Delta_{gp} x) = \bar{x} \pm \Delta_g x$.

Obliczając **wynik pomiaru i jego niepewność** uzyskuje się też dwie liczby: wartość wyniku pomiaru x (wyniku surowego skorygowanego o poprawki systematyczne) i wartość niepewności standardowej $u(x)$ lub rozszerzonej $U(x)$, przy czym końcowy zapis dla tych niepewności jest inny, o czym za chwilę.

Obie liczby występujące w tych zapisach (wynik x i błąd bezwzględny Δx , wynik x i niepewność standardowa $u(x)$ lub rozszerzona $U(x)$) należy ostatecznie przedstawić w postaci **ułamków dziesiętnych i odpowiednio zaokrąglić**.

Zaokrągla się wyłącznie wynik końcowy i nie należy zaokrąglać liczb stosowanych do dalszych obliczeń, w tym liczby niewymierne oraz stałe fizyczne i matematyczne będące liczbami niewymiernymi (np. $\sqrt{2}$, π i e) należy w tych obliczeniach przekształcać jako symbole, a nie zaokrąglone wartości; podobnie należy traktować wyrażenia wymierne niemające skończonego rozwinięcia dziesiętnego (np. $1/3$).

W procesie zaokrąglania bierze się pod uwagę **pozycje dziesiętne cyfr znaczących** w liczbach – ułamkach dziesiętnych – wartościach wyniku i błędu/niepewności.

Cyfry znaczące – wszystkie cyfry tworzące liczbę w rozwinięciu dziesiętnym (zapisane) począwszy od pierwszej niebędącej zerem, liczone od lewej strony tej liczby, czyli od strony, z której wartości pozycji dziesiętnych cyfr są większe.

000153,0027645
0,002764500

Błąd zaokrągla się do pozycji dziesiętnej pierwszej cyfry znaczącej, zawsze w górę.

Wyjątkowo, dla pomiarów największej dokładności w ocenie mierniczego, błąd można zaokrąglić do pozycji dziesiętnej drugiej cyfry znaczącej, zwłaszcza gdy pierwsza z nich jest jedynką lub dwójką.

Niepewność zaokrągla się do pozycji dziesiętnej drugiej cyfry znaczącej według ogólnych zasad zaokrąglania liczb.

Wyjątkowo, w pewnych uzasadnionych przez liczącego wypadkach (np. gdy z jakichś względów chce on podać większą jej wartość) i trzecią cyfrą znaczącą wyznaczonej wartości niepewności jest 2, 3 lub 4, niepewność można zaokrąglić w górę (np. $0,114... \approx 0,12$). Jednak gdy trzecią cyfrą znaczącą jest 0 lub 1, to niepewność należy zaokrąglić wg zasad ogólnych, czyli w tym przypadku w dół (np. $0,111... \approx 0,11$). Niepewność można też wyrażać więcej niż dwoma cyframi znaczącymi, jeśli ilość tych cyfr może być istotna w kolejnych obliczeniach wykorzystujących ustaloną wartość niepewności.

Wynik pomiaru zaokrągla się według ogólnych zasad zaokrąglania liczb do tej samej pozycji dziesiętnej, do której zaokrąglono wartość bezwzględnego błędu / niepewności.

Ogólne zasady zaokrąglania liczb: jeżeli za cyfrą na pozycji dziesiętnej, do której zaokrągla się liczbę:

- nie ma innych cyfr lub są tylko zera, liczbę pozostawia się niezmienną,
- są inne cyfry niebędące wszystkimi zerami, to:
 - jeśli pierwsza z nich jest cyfrą 0, 1, 2, 3 lub 4, to cyfrę zaokrąglaną pozostawia się – zaokrąglenie w dół – liczba zaokrąglona jest mniejsza od zaokrąglanej,
 - jeśli pierwsza z nich jest cyfrą 5, 6, 7, 8 lub 9, to cyfrę zaokrąglaną zamienia się na bezpośrednio większą (zamiana cyfry 9 na 0 pociąga dodatkowo zmianę cyfry poprzedzającej cyfrę 9 na bezpośrednio większą) – zaokrąglenie w górę – liczba zaokrąglona jest większa od zaokrąglanej,
- jest tylko cyfra 5 (i ewentualnie za nią są tylko zera), to można przyjąć zasadę, że jeżeli cyfrą na pozycji dziesiętnej, do której zaokrągla się liczbę jest cyfra:
 - nieparzysta, to wynik zaokrągla się w górę,
 - parzysta, to wynik zaokrągla się w dół,w konsekwencji cyfrą na pozycji dziesiętnej, do której zaokrągla się liczbę jest cyfra parzysta, przy czym wszystkie cyfry na pozycjach dziesiętnych o mniejszej wartości od wartości pozycji, do której zaokrągla się liczbę, tzw. cyfry zbędne, znajdujące się na lewo od przecinka dziesiętnego, zastępuje się zerami, a leżące na prawo od przecinka dziesiętnego odrzuca się.

Jeżeli liczbę należy podać do określonej ułamkowej pozycji dziesiętnej i nie ma w niej cyfr do tej pozycji, brakujące pozycje należy uzupełnić zerami, które są tu cyframi znaczącymi.

Przykłady zaokrąglania liczb:

2 516,001 (siedem cyfr znaczących, z których pierwsza jest dwójką) zaokrąglone wg zasad ogólnych do dziesiątek daje 2 520

0,008 224 98 (sześć cyfr znaczących, z których pierwsza jest ósemką) zaokrąglone wg zasad ogólnych do stutysięcznych daje 0,008 22

2,5 (dwie cyfry znaczące, z których pierwsza jest dwójką, a ostatnia piątką na pozycji dziesiątych) zapisane do pozycji tysięcznych daje 2,500

2,5 (dwie cyfry znaczące, z których pierwsza jest dwójką) zaokrąglone wg zasad ogólnych do jedności daje 2

3,5 (dwie cyfry znaczące, z których pierwsza jest trójką) zaokrąglone wg zasad ogólnych do jedności daje 4

91,48 (cztery cyfry znaczące, z których pierwsza jest dziewiątką) zaokrąglone w górę do pozycji dziesiątnej pierwszej cyfry znaczącej (jest na pozycji dziesiątek) daje 100

Przykłady zapisu wyniku pomiaru i jego błędu:

$$24640,2 \pm 91,48 \rightarrow 24640,2 \pm 100 \rightarrow 24600 \pm 100$$

cyfra zbędna po przecinku – odrzucona

cyfry zbędne przed przecinkiem – zamienione na 0

pierwsza cyfra znacząca błędu na pozycji setek

$$236,5 \pm 0,06 \rightarrow 236,50 \pm 0,06$$

pierwsza cyfra znacząca błędu na pozycji setnych,
dopisane zero znaczące do wyniku

$$0,023\ 654\ 12 \pm 0,014 \rightarrow 0,024 \pm 0,014$$

druga cyfra znacząca błędu na pozycji tysięcznych

Przykłady zapisu wyniku pomiaru i jego niepewności:

Otrzymano **niepewność standardową** pomiaru po jej zaokrągleniu do pozycji dziesiątnej drugiej cyfry znaczącej (np. $u(x) = 0,033$ m) oraz wartość tego pomiaru zaokrągloną **do tej samej** pozycji dziesiątnej (np. $x = 236,652$ m).

Dopuszczalne zapisy wyniku i niepewności standardowej:

$x = 236,652$ m, $u(x) = 0,033$ m – obie wartości podane oddzielnie

$x = 236,652(33)$ m – cyfry znaczące niepewności w nawiasie; ***zapis spotykany najczęściej, gdy cyfry znaczące niepewności występują na pozycjach dziesiętnych ułamkowych***

$x = 236,652(0,033)$ m – w nawiasie pełna liczba niepewności

$x = 236,652$ m, $u_r(x) = 0,00014$ – obie wartości podane oddzielnie

$x = 236,652$ m, $u_r(x) = 0,014$ % – obie wartości podane oddzielnie

Otrzymano **niepewność rozszerzoną** pomiaru po jej zaokrągleniu do pozycji dziesiątnej drugiej cyfry znaczącej (np. $0,055$ m dla przyjętego k , p , n , $p(x)$).

Zapis wyniku i niepewności rozszerzonej:

$x = 236,652$ m $\pm$ $0,055$ m

$x = (236,652 \pm 0,055)$ m ($k = \dots$, $p = \dots$, $n = \dots$, $p(x) \dots$)

$x = 236,652$ m $\pm$ $0,023$ %